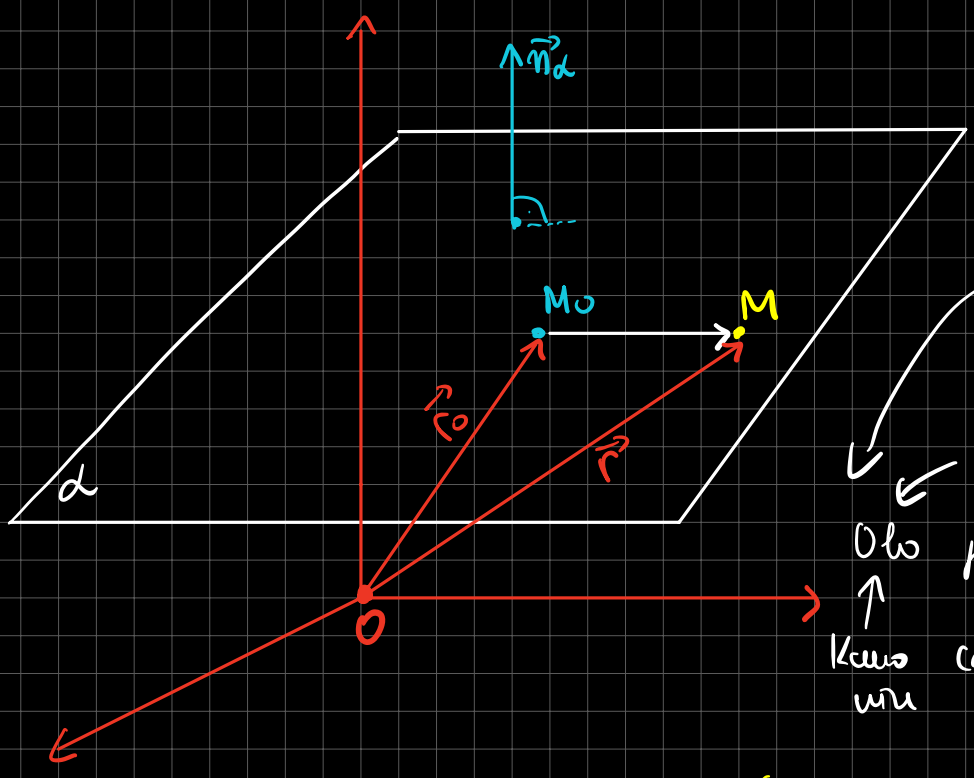
ЈЕДНАЧИНЕ РАВНИ



$\vec{n}_\alpha$ - вектор нормале на раван α

$\vec{n}_\alpha(A,B,C)$

M_0 тачка која припада равни

$M_0(x_0,y_0,z_0)$

Ово је дато (познато)

Како са ова 2 податка описати све тачке из равни α?

За било коју тачку $M(x,y,z)\in\alpha$ важиће $\vec{M_0M} \perp \vec{n}_\alpha$

$\vec{n}_\alpha \perp \vec{M_0M} \Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{M_0M} = 0$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ => да и $\vec{r}_0$ има исте коорд. $\vec{r}_0(x_0,y_0,z_0)$

$M(x,y,z)$ => $\vec{r}(x,y,z)$

$\vec{r}_0 + \vec{M_0M} = \vec{r} \Rightarrow \vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$\vec{n}_\alpha \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} - \vec{n}_\alpha \cdot \vec{r}_0 = 0$

овде је све познато $-(A,B,C)\cdot(x_0,y_0,z_0)$

$= D$ (неки број)

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{r} + D = 0$$

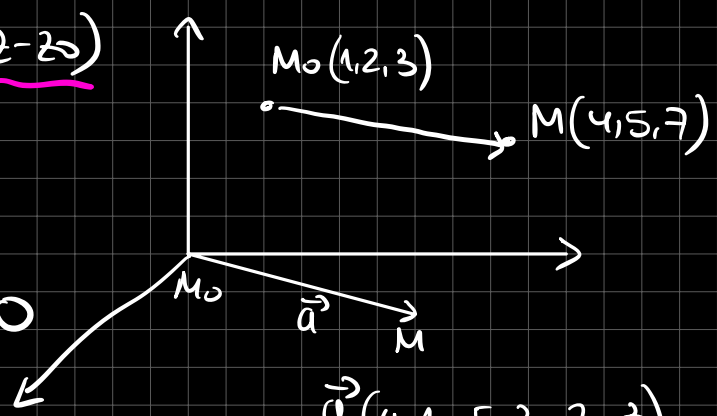
ОПШТА ВЕКТОРСКА Ј-НА РАВНИ

Једначина која се чешће примењује у задацима је „општа":

$\overrightarrow{M_0M}$?

$M_0(x_0,y_0,z_0) \longrightarrow M(x,y,z)$

$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$



$\vec{a}(4-1, 5-2, 7-3)$

$\vec{a}(3, 3, 4)$

$\vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$

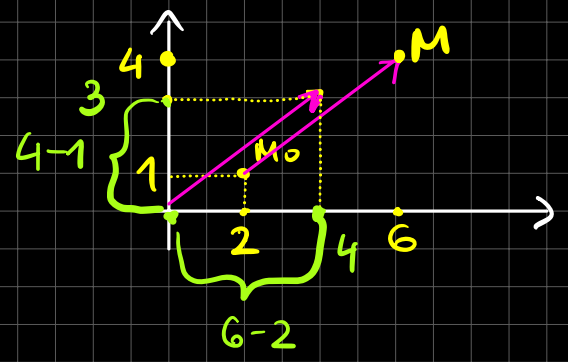
$(A,B,C)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$A\cdot x - A\cdot x_0 + B\cdot y - B\cdot y_0 + C\cdot z - C\cdot z_0 = 0$

$\vec{n}_\alpha(A,B,C)$
$M_0(x_0,y_0,z_0)$

ово је познато од почетка



$Ax+By+Cz \overbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}^{\text{нпр. } D}=0$

$$\boxed{\begin{array}{c} Ax+By+Cz+D=0 \\ \text{ОПШТА ЈНА РАВНИ} \end{array}}$$

пример $\vec{n}(\overset{A}{1},\overset{B}{2},\overset{C}{3})$ је вектор нормале, а тачка $M(5,6,8)$ припада равни α. Наћи општу ј-ну равни.

Можда је најлакше кренути од

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$\vec{n}(1,2,3)$
A B C

$M(5,6,8)$
x_0, y_0, z_0

$1(x-5)+2(y-6)+3(z-8)=0$

$x-5+2y-12+3z-24=0$, $\quad x+2y+3z-41=0$ $\quad +(-41)$

$Ax+By+Cz+D=0$ ← Какав је пролаз ове равни у коорд. систему?

↓

Ако су $A,B,C,D \neq 0$

$Ax+By+Cz=-D \quad /:(-D)$

$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$

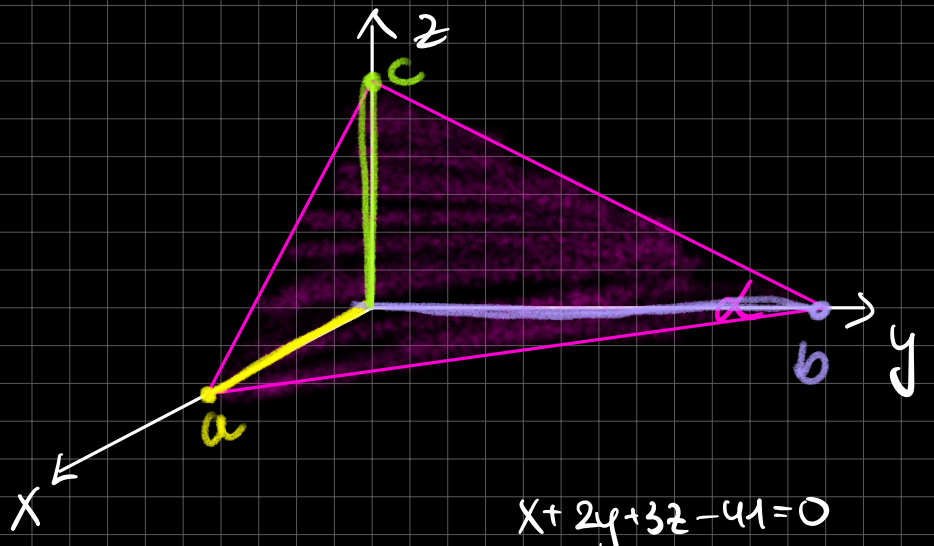
$$\frac{x}{\frac{-D}{A}}+\frac{y}{\frac{-D}{B}}+\frac{z}{\frac{-D}{C}}=1$$

СЕГМЕНТНИ ОБЛИК ЈНЕ РАВНИ

$\alpha: \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

↓ ↓ ↓

сегменте (одсечке) на координатним осама



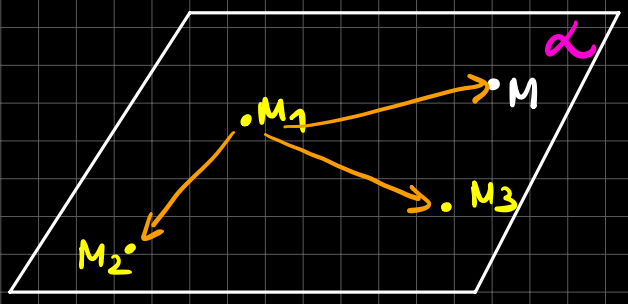
$x+2y+3z-41=0$

$x+2y+3z=41 \quad /:41$

$\frac{x}{41}+\frac{y}{\frac{41}{2}}+\frac{z}{\frac{41}{3}}=1$

Како се одређује јна равни кроз 3 тачке?

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in \alpha$



Нпр овако:

За сваку тачку $M \in \alpha$ треба да важи да су вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M}$ компланарни.

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}\right] = 0$$

$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Или преко вектора нормале и тачке која припада равни.

Тачка? Било која, нпр. M_1

Вектор нормале? Нпр. векторским производом било која два вектора, нпр $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$

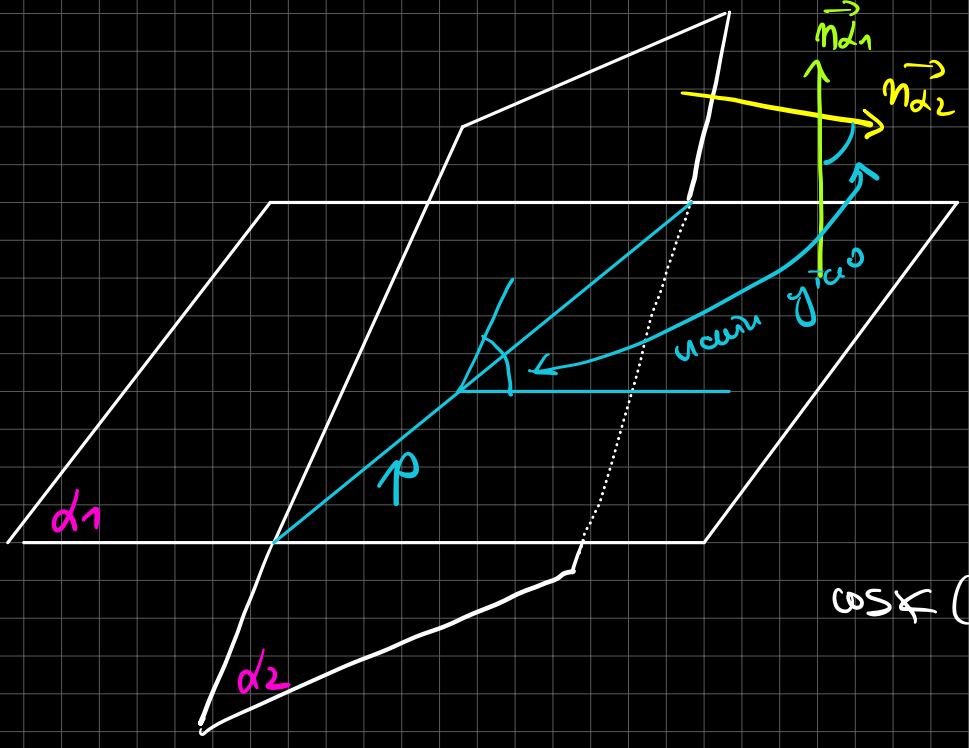
МЕЂУСОБНИ ОДНОС ДВЕ РАВНИ

$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \vec{n}_{\alpha_1} = (A_1, B_1, C_1)$

$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad \vec{n}_{\alpha_2} = (A_2, B_2, C_2)$

1. Пресек је ПРАВА.

Ако се α_1 и α_2 секу, систем има ∞ много решења која представљају тачке једне праве.



Под којим углом се секу? Угао између равни је угао између његових нормала.

$$\cos\sphericalangle(\vec{n}_{\alpha_1}, \vec{n}_{\alpha_2}) = \frac{\vec{n}_{\alpha_1} \cdot \vec{n}_{\alpha_2}}{|\vec{n}_{\alpha_1}| \cdot |\vec{n}_{\alpha_2}|}$$

Ако важи $\vec{n}_{\alpha_1} \perp \vec{n}_{\alpha_2}$ тада су равни НОРМАЛНЕ

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \iff \vec{n}_{\alpha_1} \perp \vec{n}_{\alpha_2} \iff \vec{n}_{\alpha_1} \cdot \vec{n}_{\alpha_2} = 0$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

2. Две равни се ПОКЛАПАЈУ.

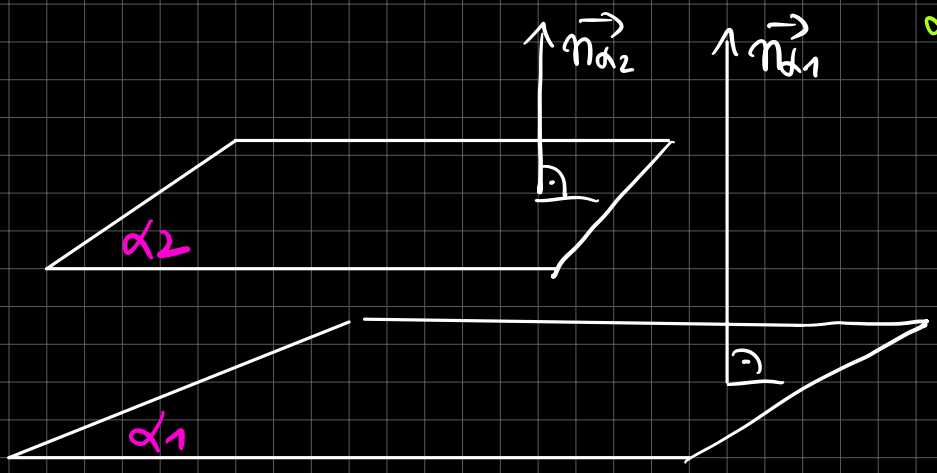
Такве равни имају ∞ много тачака пресека, али важи

да су ли вектори нормала колинеарни!

$\alpha_1 = \alpha_2 \iff \vec{n_{\alpha_1}}$ и $\vec{n_{\alpha_2}}$ колинеарни и $D_1 = D_2$

3. Две равни су ПАРАЛЕЛНЕ

Такве равни немају тачке пресека (тј. систем нема решења).



$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \iff \vec{n_{\alpha_1}}$ и $\vec{n_{\alpha_2}}$ колинеарни и $D_1 \neq D_2$

$\vec{n_{\alpha_1}} = k \cdot \vec{n_{\alpha_2}}$

$(A_1, B_1, C_1) = k \cdot (A_2, B_2, C_2)$

$A_1 = k \cdot A_2$

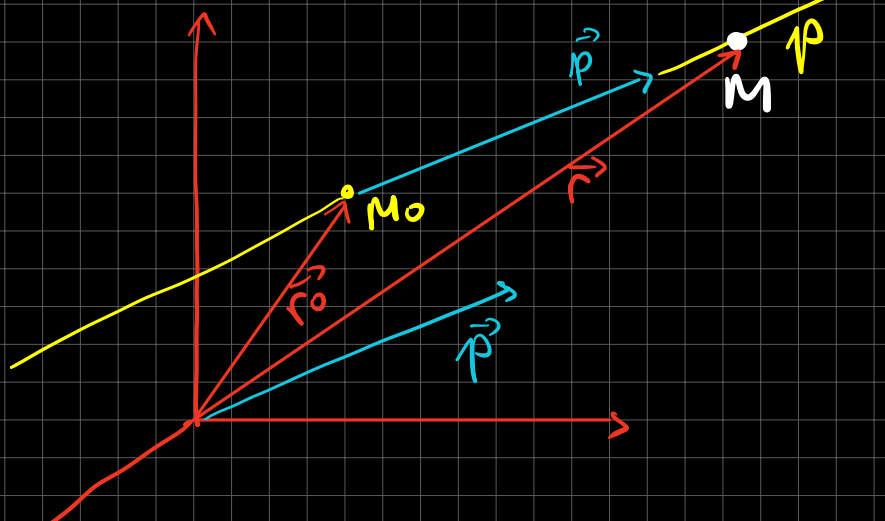
$B_1 = k \cdot B_2$

$C_1 = k \cdot C_2$

$(k =) \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ

$M_0(x_0, y_0, z_0)$
$\vec{p}(l, m, n)$ } Права једнозначно одређена тачком која јој припада и вектором правца $\vec{p}$



За било који тачку $M \in p$ мора да важи $\vec{p}$ и $\vec{M_0M}$ колинеарни

$\vec{p} \times \vec{M_0M} = 0$

$\vec{r_0} + \vec{M_0M} = \vec{r} \Rightarrow \vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$

$\vec{p} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$

$\vec{p} \times \vec{r} - \vec{p} \times \vec{r_0} = 0$

$\vec{p} \times \vec{r} = \underbrace{\vec{p} \times \vec{r_0}}_{\text{ово је дато} = \vec{q}}$

$$\boxed{\vec{p} \times \vec{r} = \vec{q}}$$

ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ У ВЕКТОРСКОМ ОБЛИКУ

$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{M_0M}$, $\vec{M_0M}$ колинеарно са $\vec{p}$

$\vec{M_0M} = t \cdot \vec{p}$

$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{p}$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (l, m, n)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot l \\ y &= y_0 + t \cdot m \\ z &= z_0 + t \cdot n \\ t &\in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ

пример: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$

мењањем t добијамо остале тачке са ове праве

једна тачка са праве $(1, 2, 3)$

нпр. $t = 1$: $x = 1 + 1 = 2$, $y = 2 - 1 = 1$, $z = 3 + 2 = 5$ $(2, 1, 5)$

$t = 2$: $x = 1 + 2 = 3$, $y = 2 - 2 = 0$, $z = 3 + 4 = 7$ $(3, 0, 7)$

А како очитавамо вектор правца?

$x = 1 + t$
$y = 2 - t$
$z = 3 + 2t$

$x = x_0 + t \cdot l$
$y = y_0 + t \cdot m$
$z = z_0 + t \cdot n$
$t \in \mathbb{R}$

— вектор правца

једна тачка са праве

$\vec{p} = (1, -1, 2)$

пример. Дата је тачка $T(5, 7, 9)$ и вектор правца $\vec{p}(2, 3, 5)$
Како изгледа пар. ј-на праве?

$x = 5 + 2t$
$y = 7 + 3t$
$z = 9 + 5t$

Ако све изразимо преко t?

$x = x_0 + t \cdot l \longrightarrow t = \frac{x - x_0}{l}$

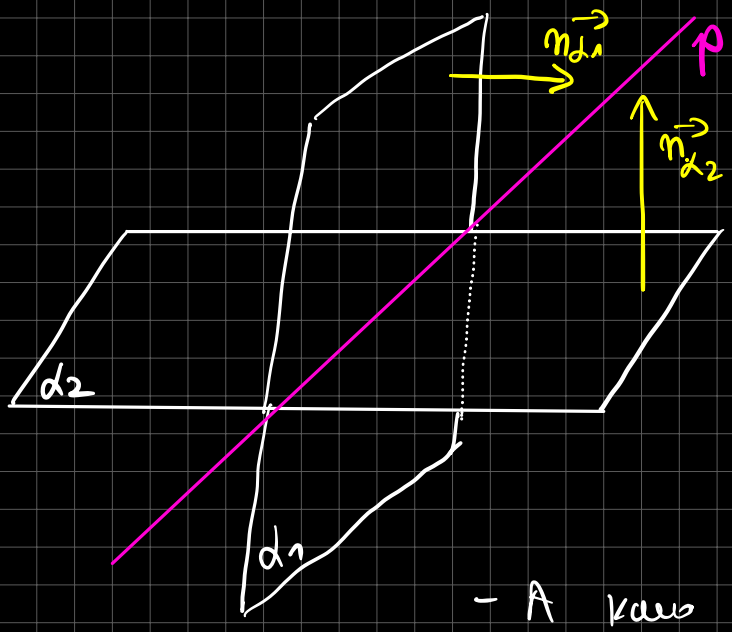
$y = y_0 + t \cdot m \longrightarrow t = \frac{y - y_0}{m}$

$z = z_0 + t \cdot n \longrightarrow t = \frac{z - z_0}{n}$

$$t = \boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$

КАНОНСКИ ОБЛИК Ј-НЕ ПРАВЕ

Како се одређује ј-на праве као пресек две равни?



$$p: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

$\vec{n_{\alpha_1}} \perp p \qquad \vec{n_{\alpha_2}} \perp p$

$\Rightarrow \vec{n_{\alpha_1}} \times \vec{n_{\alpha_2}}$ дају вектор који је нормалан на оба и може бити вектор правца

$\vec{p} = \vec{n_{\alpha_1}} \times \vec{n_{\alpha_2}}$ (долијамо l, m, n праве)

– А како долијамо неку тачку са праве?

Нпр фиксирамо једну променљиву $(x=0)$

$$\left.\begin{aligned} A_1\cancelto{0}{x}+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2\cancelto{0}{x}+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\}$$

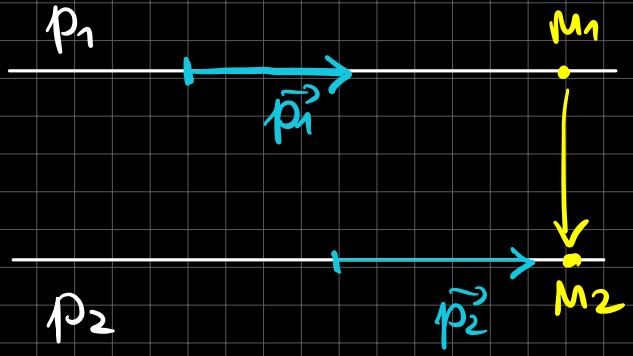
остаје систем са 2 једначине и две непознате...

ОДНОС ДВЕ ПРАВЕ

$p_1: \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1} \Rightarrow \vec{p_1}(l_1, m_1, n_1),\ M_1(x_1, y_1, z_1)$

$p_2: \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2} \Rightarrow \vec{p_2}(l_2, m_2, n_2),\ M_2(x_2, y_2, z_2)$

1. Праве су ПАРАЛЕЛНЕ.



$p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow$

(1) $[\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{M_1M_2}] = 0$ и $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$ колинеарни

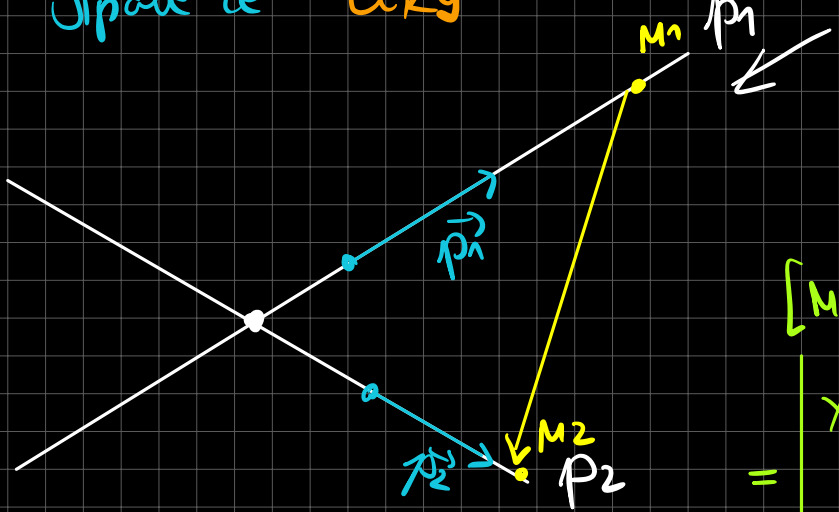
$\vec{p_1} = k \cdot \vec{p_2}$

$(l_1, m_1, n_1) = k \cdot (l_2, m_2, n_2)$

$$(k=) = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

Напомена: Уколико немају заједн. тачка онда су паралелне, у супротном се поклапају.

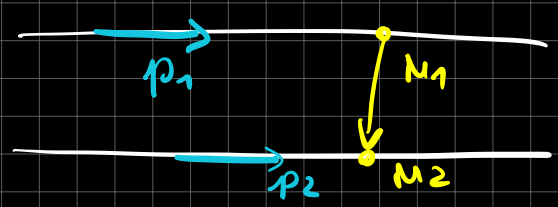
2. Праве се СЕКУ



Сва 3 вектора треба да су у истој равни, тј. $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарни

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p_1}, \vec{p_2}] = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

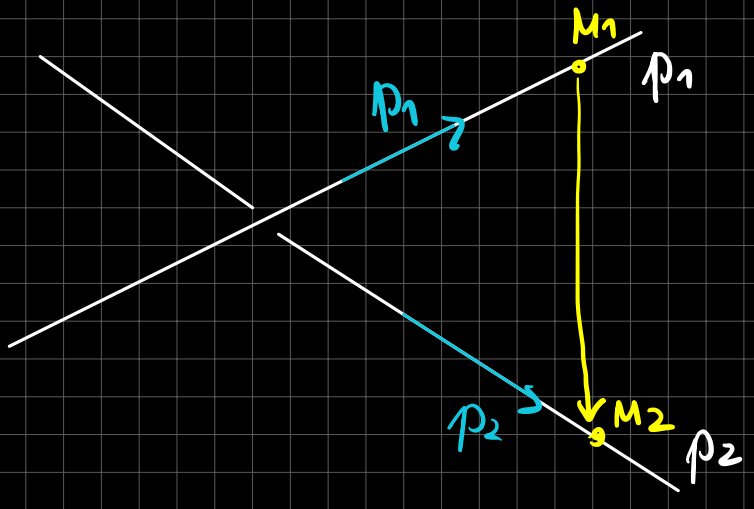
али не смеју да буду



Због тога

$$(l_1, m_1, n_1) \neq k \cdot (l_2, m_2, n_2)$$

3. Праве су МИМОИЛАЗНЕ.



Не смеју да буду у истој равни!

Због тога

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p_1}, \vec{p_2}] \neq 0$$