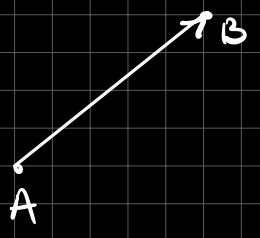
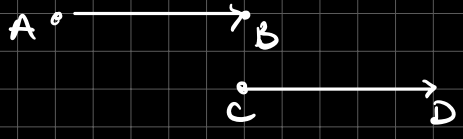
ВЕКТОРИ

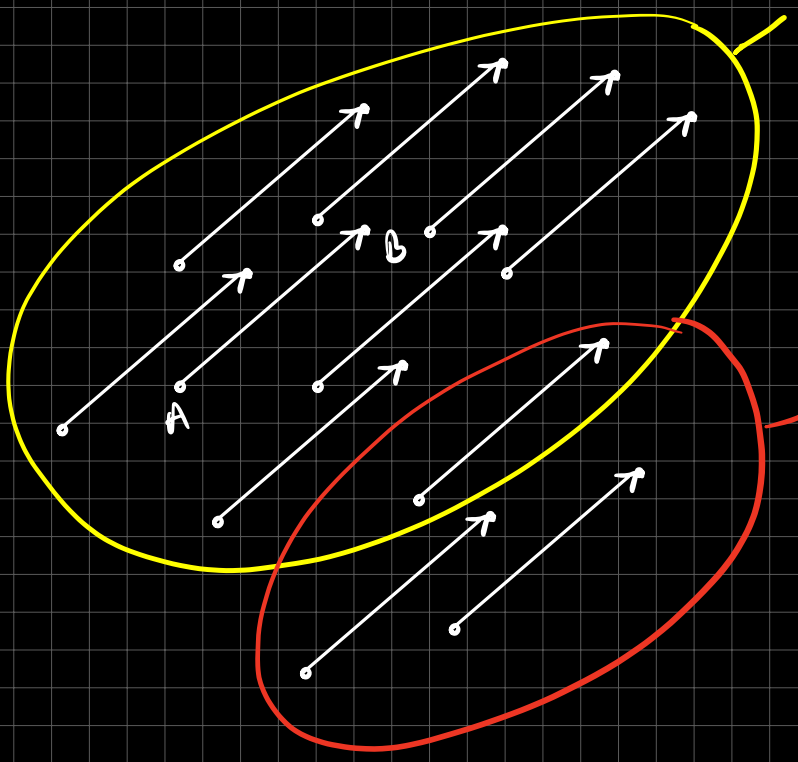


$(A,B) \rightarrow \overrightarrow{AB}$ ОРИЈЕНТИСАНА ДУЖ

- правац
- смер
- интензитет

ИДЕЈА: Две оријент. дужи су ЕКВИВАЛЕНТНЕ ако су исмог правца, смера и интензитета.





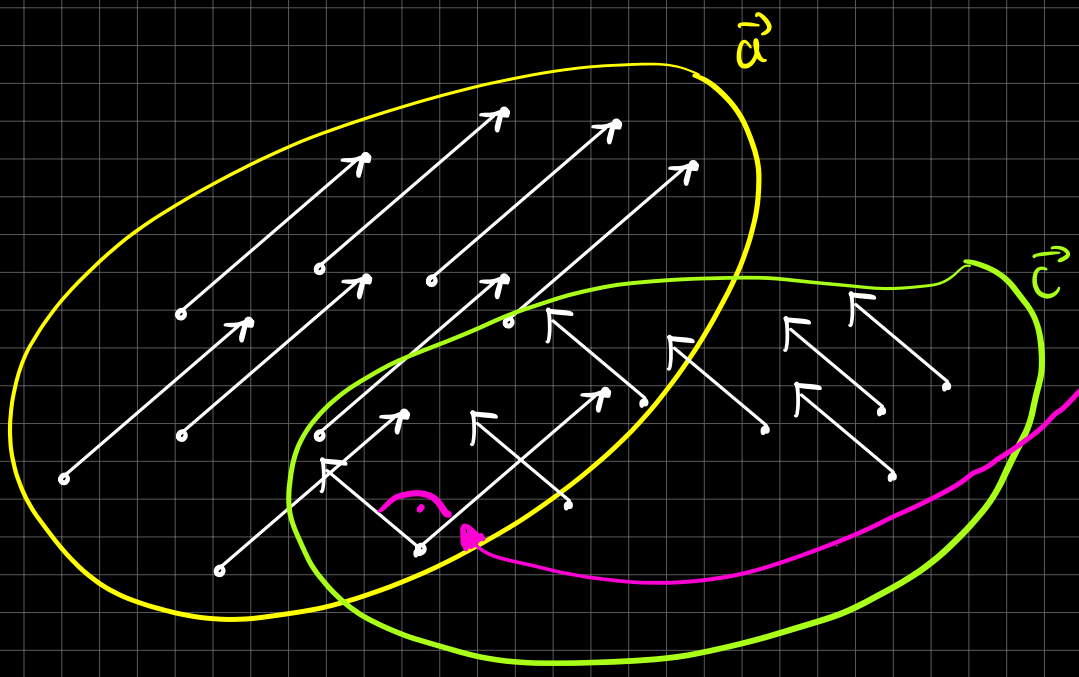
вектор $\vec{a}$

Класа међусобно еквивалентних оријентисаних дужи, назива се геометријски вектор.

вектор $\vec{b}$

Два вектора су ЈЕДНАКА ако имају оријентисане дужи које припадају обема векторима.

Правац, смер и интензитет вектора су одређени правцем, смером и интензитетом...

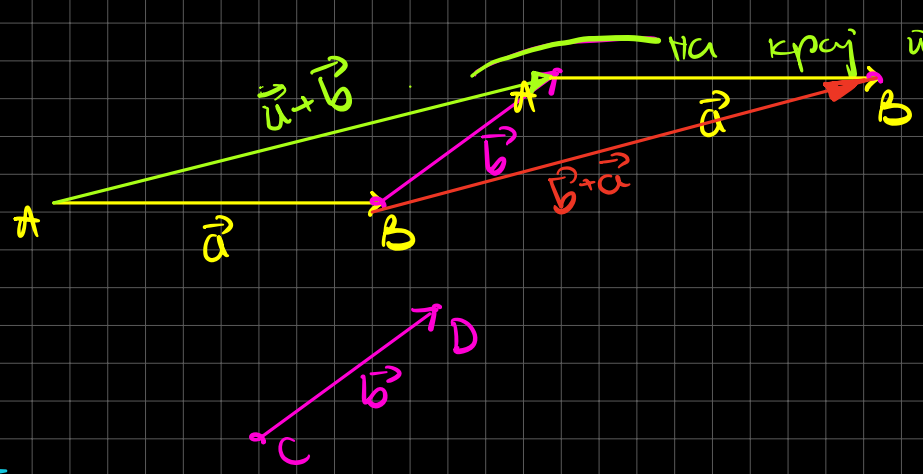


Угао између вектора једнак је ∡ између 2 нихова представ. који имаји зај. почетак

САБИРАЊЕ ВЕКТОРА

$\vec{a} = \vec{AB}$

$\vec{b} = \vec{CD}$



на крај првог, надовежемо другу

ОСОБИНЕ

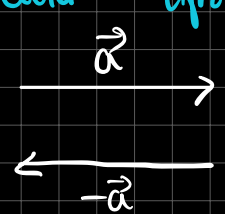
1° $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

2° $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3° Ако $\vec{0}$ вектор одговара пару (A, A) :

$$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$$

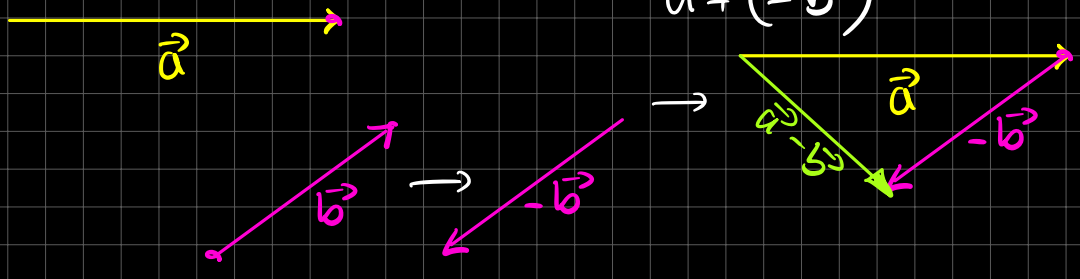
4° $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$, где је $-\vec{a}$ вектор који има исти правац и инт. као $\vec{a}$, али супротан смер.



ОДУЗИМАЊЕ?

$\vec{a}-\vec{b}=?$

$\vec{a}+(-\vec{b})$



МНОЖЕЊЕ ВЕКТОРА БРОЈЕМ (СКАЛАРОМ)

За дати вектор $\vec{a}$, вектор $\alpha\cdot\vec{a}$ једнак је вектору за кори важи:

1° ПРАВАЦ му је исти...

2° ИНТЕНЗИТЕТ $|\alpha\cdot\vec{a}| = |\alpha|\cdot|\vec{a}|$ ← интезитет

ап сол. вредн.

3° СМЕР је једнак смеру $\vec{a}$ ако је $\alpha>0$, а супротан за $\alpha<0$.

пример



ОСОБИНЕ:

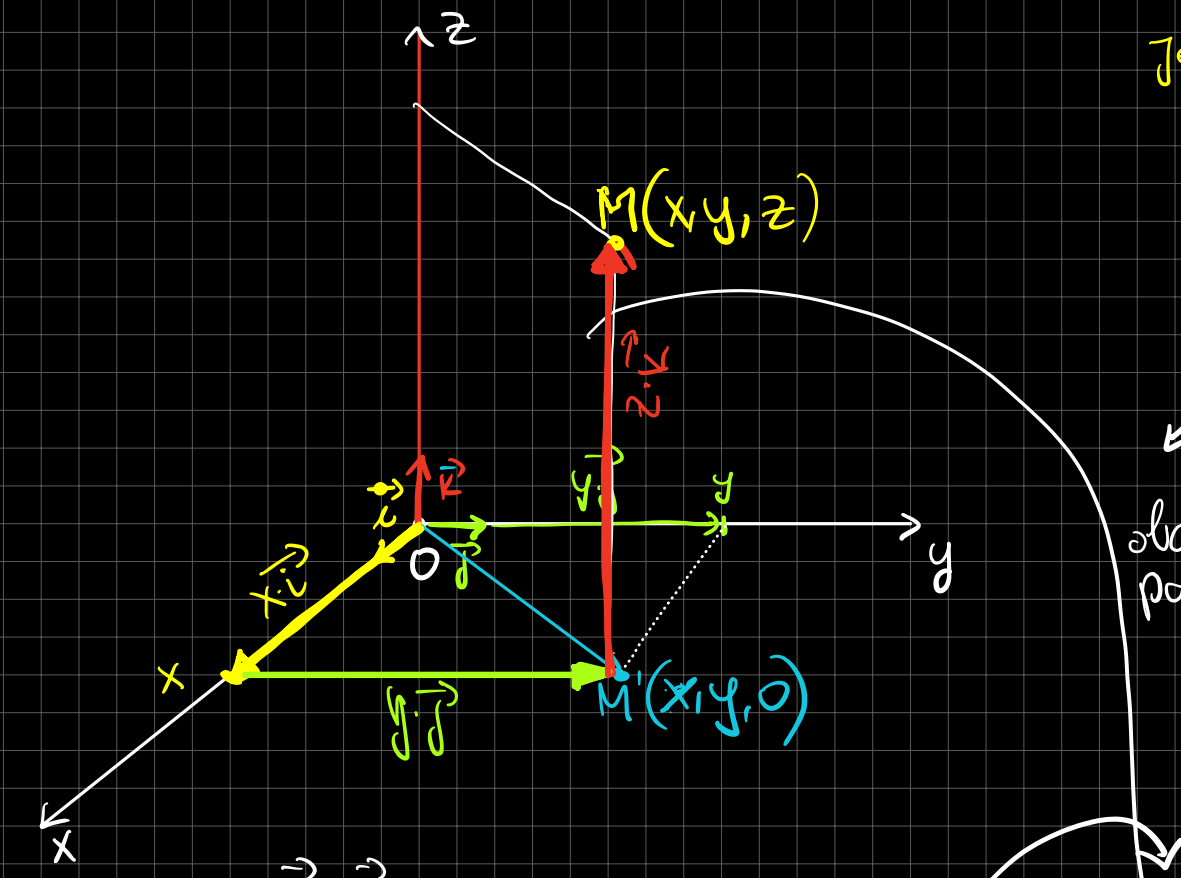
1° $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

2° $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})=\beta(\alpha\vec{a})$

3° $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$

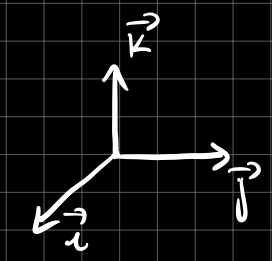
4° $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

ДЕКАРТОВ ПРАВОУГЛИ КООРД. СИСТЕМ У ПРОСТОРУ

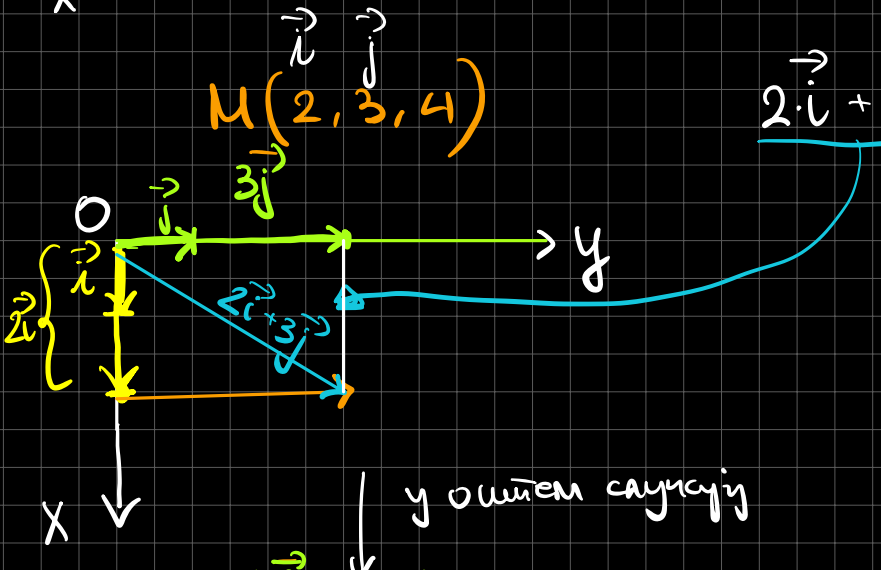


Јединични вектори:

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

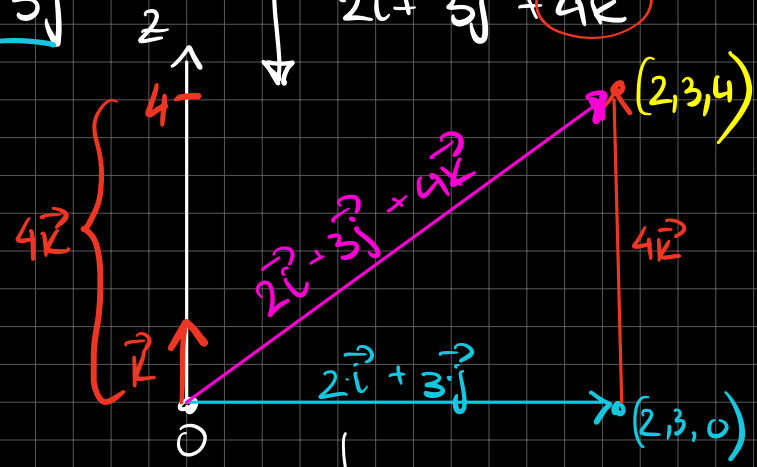


ова раван

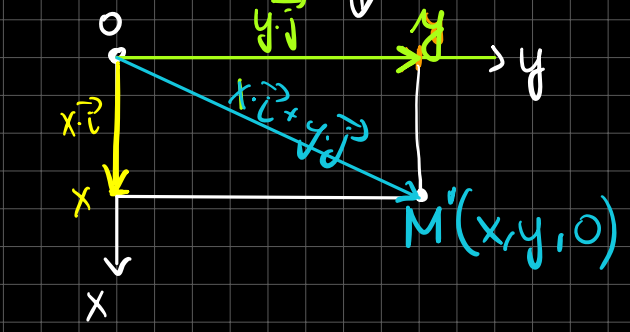


$2\vec{i} + 3\vec{j}$

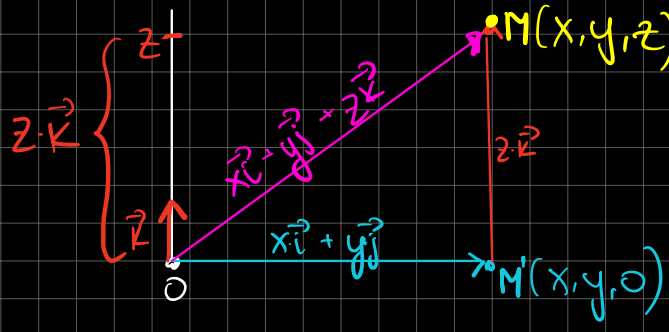
Исто радимо $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$



у општем случају



у општем случају



Ако је $\vec{a}$ задат са координатама

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ то значи: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

Слично, ако тачка M има коорд. $M(x, y, z)$

$\Rightarrow \quad \vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z\vec{k}$

- ... $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ су ЛИН. НЕЗАВИСНИ тј. неједан...
- i, j, k чине МАКС. ЛИН. НЕЗАВИСАН скуп вектора, тј. свака други скуп који поред та три вектора садржи још неки $\Rightarrow$ ЛИН. ЗАВИСТАН.

Зато ти вектори могу чинити

ОРТОНОРМИРАНУ БАЗУ ТРОДИМЕНЗИОНОГ ПРОСТОРА

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

ДЕФ: СКАЛ. ПРОИЗВОД вект. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у ознаци $\vec{a} \cdot \vec{b}$ је СКАЛАР који се добија по ф-ли:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$$

ОСОБИНЕ

1° $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – КОМУТАТИВНОСТ

2° $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3° $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a}(\alpha \cdot \vec{b})$

4° $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff$ неки од них $= \vec{0}$ или $\vec{a} \perp \vec{b}$

5° $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

6° Шта ако су вектори задати координатама?

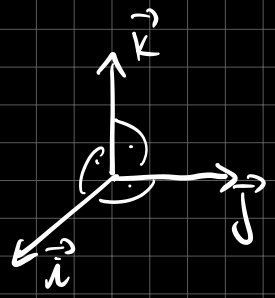
$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= (a_x, a_y, a_z)\\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z)\end{aligned}\right\} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = ?$$

$$(\underbrace{a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}}_{\vec{a}})\cdot(\underbrace{b_x\cdot\vec{i} + b_y\cdot\vec{j} + b_z\cdot\vec{k}}_{\vec{b}}) =$$

↓ ruje исто као

$$\cancel{(a_x\cdot\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k})}$$

$$a_xb_x\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{\to 1} + a_xb_y\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{\to 0} + a_xb_z\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{k}}_{\to 0} + a_yb_x\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{\to 0} + a_yb_y\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{\to 1} + a_yb_z\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{k}}_{\to 0} + a_zb_x\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{i}}_{\to 0} + a_zb_y\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{j}}_{\to 0} + a_zb_z\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{\to 0}$$



$\vec{i}\perp\vec{j} \Rightarrow \vec{i}\cdot\vec{j} = 0$

слично $\vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \ldots = 0$

$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$

$\vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

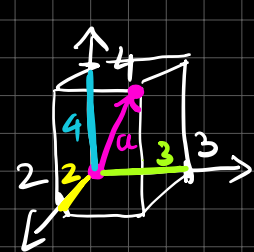
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

пример $\vec{a} = (2,3,4)$, $\vec{b} = (5,6,7)$ $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot5 + 3\cdot6 + 4\cdot7$

$$= \cancel{(2\cdot5, 3\cdot6, 4\cdot7)}$$

Како да одредимо угао између два вектора?

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$



$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$? $\quad \vec{a} = (2,3,4)$

↓

$$\sqrt{(2,3,4)\cdot(2,3,4)} = \sqrt{2^2+3^2+4^2}$$ ← Пиѳагорина си!

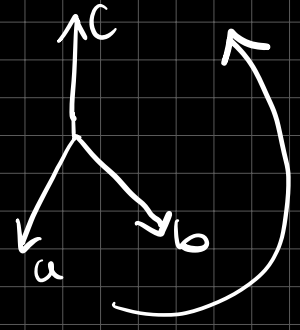
ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

ДЕФ: ВЕКТ. ПР. вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ у ознаци $\vec{a}\times\vec{b}$ је трећи вектор $\vec{c}$:

1° ПРАВАЦ: $\vec{c}$ је нормалан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{c}\perp\vec{a},\vec{b})$

2° $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

3° СМЕР: вектори $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ образују триједар десне оријентације



ОСОБИНЕ:

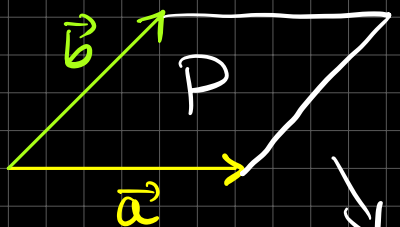
1° $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}$

2° $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

3° $\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

4° $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \iff$ један од њих $= \vec{0}$, или $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни

5° Интензитет $|\vec{a}\times\vec{b}|$ једнак је површини ▱ конструисаног над $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$P = |\vec{a}\times\vec{b}|$

↘ спец. случај $\vec{a}\perp\vec{b}$



ПРАВОУГАОНИК

странице су дужина: $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$

$\Rightarrow$ $P = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

6° Како се векторски задани координатама?

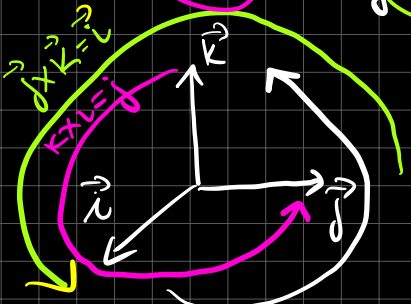
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$
$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ $\Big\}$ $\vec{a} \times \vec{b} = ?$

$$(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$a_x b_x \vec{i}\times\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\times\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\times\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\times\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\times\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\times\vec{k} +$$

$$a_z b_x \vec{k}\times\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\times\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\times\vec{k} = (*)$$

$\vec{i}\times\vec{i} = 0$
$\vec{j}\times\vec{j} = 0$
$\vec{k}\times\vec{k} = 0$



$\vec{i}\times\vec{j}$ → даје вектор који је управан $\perp \vec{i}, \vec{j}$

→ интензитет? $= 1$
$|\vec{i}\times\vec{j}| = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{j})$
$1 \quad 1$

→ смер $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ због десне оријентације, сами $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$$(*) = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i}$$

$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Развој по 1 врсти следеће детерм.

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\Big\}$ $\vec{a}\times\vec{b} = ?$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

← најбоље рачунати развој по I врсти

$$= 3\cdot\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (3, -5, -1)$$

МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

ДЕФ: Мешов. производ вект. $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ је скалар који је једнак скаларном производу вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$.

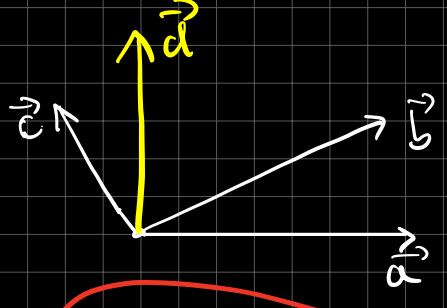
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

ОСОБИНЕ:

1° $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ $\quad$ $(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ $\quad$ $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

2° $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff$ неки од њих је $\vec{0}$ или су $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ КОМПЛАНАРНИ

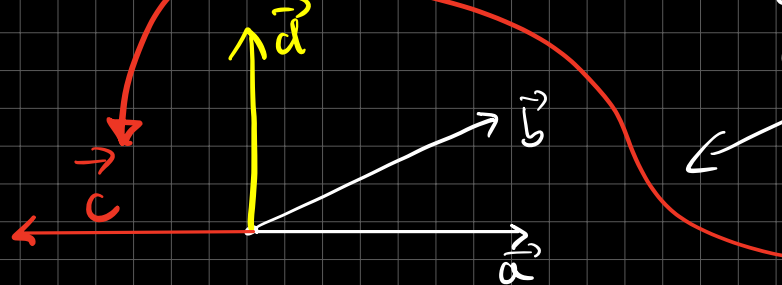


$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{d}$, $\vec{d} \perp \vec{a}, \vec{b}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$ ← обо страна

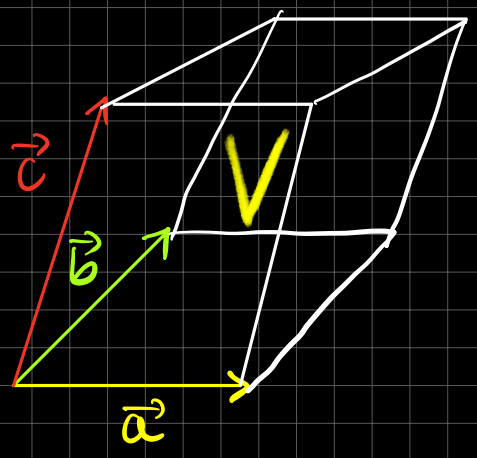
$\vec{d}\cdot\vec{c}$

$\vec{d}\cdot\vec{c} = 0$ ако $\vec{d}\perp\vec{c}$



← дакле $\vec{c}$ се налази у равни где су $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3° Апсолутна вредност (!) мешовитог производа $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака је V паралелопипеда конструисаног над векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.



размислити о специјалном случају када тражимо запремину квадра $(a \cdot b \cdot c)$

4° Шта ако су вектори дати коорд.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z) \\ \vec{c} &= (c_x, c_y, c_z) \end{aligned}\right\} \quad [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = ?$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\left[(a_y b_z - a_z b_y) \cdot \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k} \right)$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \cdot c_x + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot c_y + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot c_z =$$

Развој по III врсти сл. детерм.

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$