СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

ДЕФ: Скуп једначина:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, \dots, n$, $b_i \in \mathbb{R}$, назива се систем од m линеарних једначина са n непознатих.

a_{ij} – коефицијенти уз непознате

b_i – слободни чланови

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – непознате.

пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - 7x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ x + 7y - 4z = 2 \end{cases}$$

$m = n$ $\Rightarrow$ систем зовемо КВАДРАТНИМ

Ако су сви $b_i = 0$ $\Rightarrow$ ХОМОГЕНИ СИСТЕМ.

ДЕФ: РЕШЕЊЕ СИСТЕМА -- n-торка ...

1. Ако систем има решење $\Rightarrow$ САГЛАСАН (РЕШИВ).
   Уколико је решење јединствено $\Rightarrow$ ОДРЕЂЕН.
   Уколико има више од 1 решење $\Rightarrow$ НЕОДРЕЂЕН.
2. Ако систем нема решења $\Rightarrow$ ПРОТИВРЕЧАН.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

ДЕФ: ЕЛЕМЕНТАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ЈЕДНАЧИНА СИСТЕМА

1° замена места двема једначинама

2° множење произвољне једначине скаларом

3° множење неке ј-не скаларом и додавање другој ј-ни

потпуно аналогно трансформацијама из деф. од прошле недеље

ДЕФ. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ матрице су

1° замена места двема врстама (колонама)

2° множење неке врсте (колоне) скаларом

3° множење неке врсте (колоне) скаларом и додавање некој другој врсти (колони)

правимо паралелу између система и матрица...

ТЕОРЕМА: Применом елементарних трансформација система коначан број пута добија се ЕКВИВАЛЕНТАН СИСТЕМ полазном. тј. систем који има исти скул решења као полазни.

ДЕФ: ЕКВИВАЛЕНТНА МАТРИЦА B дакој матрици $A_{m\times n}$ је она матр. која се добија од матр. A применом елем. тр. коначан број пута

$A \sim B$

ТЕОРЕМА: Еквивалентне матрице имају исти ранг.

еквивалентне матрице чувају ранг

еквивалентни системи чувају решење

ТЕОРЕМА: Уколико је нека ј-на система лин. комб. неких других ј-на, тада је систем који се добија њеним изостављањем еквивалентан полазном.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=1 \\ 3x+\cancel{4y-z}=1 \end{cases} \quad -1$$

$(3) = 2(1) + (2)$

ову (3) слемо да избацимо јер не носи нову информацију

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=1 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=1 \\ \cancel{0+0+0=0} \end{cases}$$

↓

систем еквивалентан полазном

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ \cancel{5=5} \\ \cancel{10=10} \\ \cancel{-2=-2} \end{cases}$$

КРАМЕРОВА ТЕОРЕМА

!!!

ЗА КВАДРАТНИ СИСТЕМ

Посматрамо систем

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Формирамо детерминанте...

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

, а затим дет. за сваку променливу

↑ дет. систем

уместо прве колоне уписуємо сл. чланове

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \ldots,\quad D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n \end{vmatrix}$$

КРАМЕРОВА ТЕОРЕМА:

За кв. сист. лин. ј-на важи следеће:

1° Ако је $D\neq 0$ ... ЈЕДИНСТВЕНО решење ...:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \ldots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

2° Ако је $D=0$, а бар једна од $D_i\neq 0 \Rightarrow$ НЕМА РЕШЕЊА

3° Ако су све дет. једнаке 0 ($D=D_1=D_2=\ldots=D_n=0$), тада ако систем има решења $\Rightarrow$ има их ∞ много

Пример $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-3-4=-7,\quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2$$

$D\neq 0$, $D_x\neq 0$, $D_y\neq 0 \Rightarrow$ 1° случај

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

$$(x,y)=\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Пример $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad , D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

све дет $=0$ $\Rightarrow$ 3° случај

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \cancel{2x+2y=2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= t \\ y &= 1-t \end{aligned}$$

ово је систем који је преостао

Решења су $(t, 1-t)$, $t \in \mathbb{R}$

Ако посматрамо хомогени кв. систем:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$ тада је

$D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$

1° Ако је $D \neq 0 \Rightarrow$ систем има тривијално решење $(0, 0, \dots, 0)$

2° Ако је $D = 0 \Rightarrow \infty$ много решења.

КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВА ТЕОРЕМА

Дуќи се на произволан систем

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

Дефинираме ...:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ТЕОРЕМА: Систем од m лин. рав. со n непознати (ранг) е сигласан ако и само ако е $r(A) = r(\bar{A})$.

При тоа важи:

1° Ако е $r(A) = r(\bar{A}) = n$ $\Rightarrow$ ЕДИНСТВЕНО РЕШЕНИЕ.

2° Ако е $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$, тогаш системот има бесконечно многу решенија, и при тоа $n-r$ слободни променливи преку кои се можат изразити преостанатите r променливи.

Пример $\begin{cases} x+y+z=1 \end{cases}$ $m=1$, $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 1$ $\qquad$ $r(\bar{A}) = 1$

$r(A) = r(\bar{A})$ $\Rightarrow$ систем е сигласан

1° да ли важи $r(A) = r(\bar{A}) = 1 = 3$? ↯

2° $r = 1 < n = 3$ ⇒ система има ∞ решења

...безконечно много решења, и при томе $n - r$ $3 - 1 = 2$ слободних променливих преко којих се могу изразити преостале r променљивих. $r = 1$

2 слободне променљиве, преко којих се изражава 1 променљива

$x + y + z = 1$ Решење? $x = \alpha \in \mathbb{R}$

$y = \beta \in \mathbb{R}$

$z = 1 - \alpha - \beta$

$(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta)$

МАТРИЧНА МЕТОДА ЗА РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА

(За квадратни систем)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Квадратни систем записан у матрич. облику

$$A \cdot X = B$$

Идеја:

Помножити $A \cdot X$, па изједначити са B, и проверити да ли добијамо систем

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Решавање система се своди на решавање матричне једначине $A \cdot X = B$. Прво да добијемо $X = \ldots$?

$A^{-1} \mid A \cdot X = B$

↑

Множење са леве стране, није исто као $A \cdot X \cdot A^{-1}$

Ако је $\det A \neq 0 \Rightarrow$ матрица A има инверзну: A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Пример $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B$

A^{-1} ? $\quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\operatorname{adj} A$? $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$