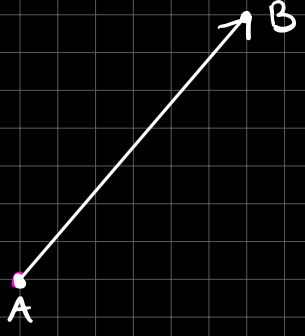
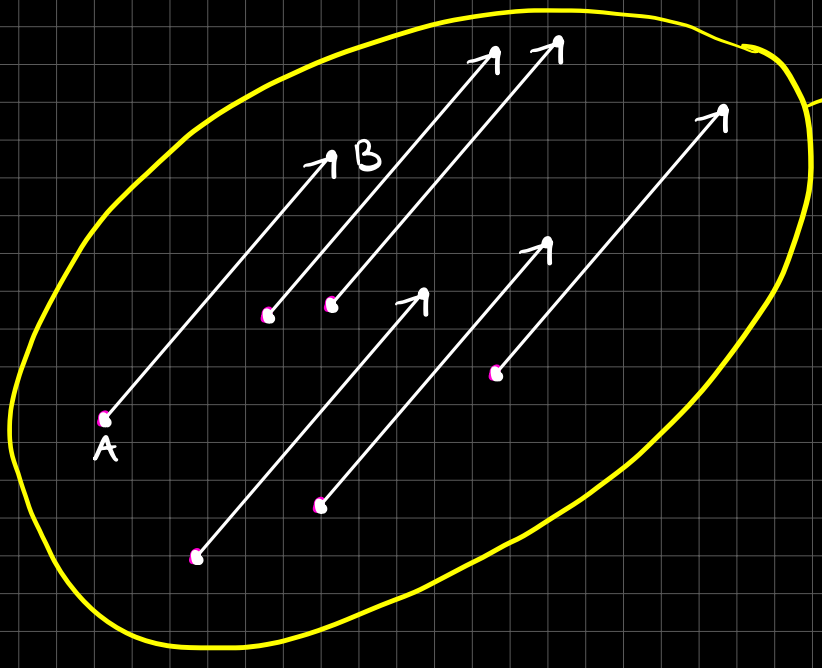
ВЕКТОРИ



$(A,B) \to \overline{AB}$ – ОРИЈЕНТИСАНА ДУЖ

- правац
- смер
- интензитет

ДЕФ: Две ор.. ЕКВИВАЛЕНТНЕ ако су исти правца, смера и интензитета



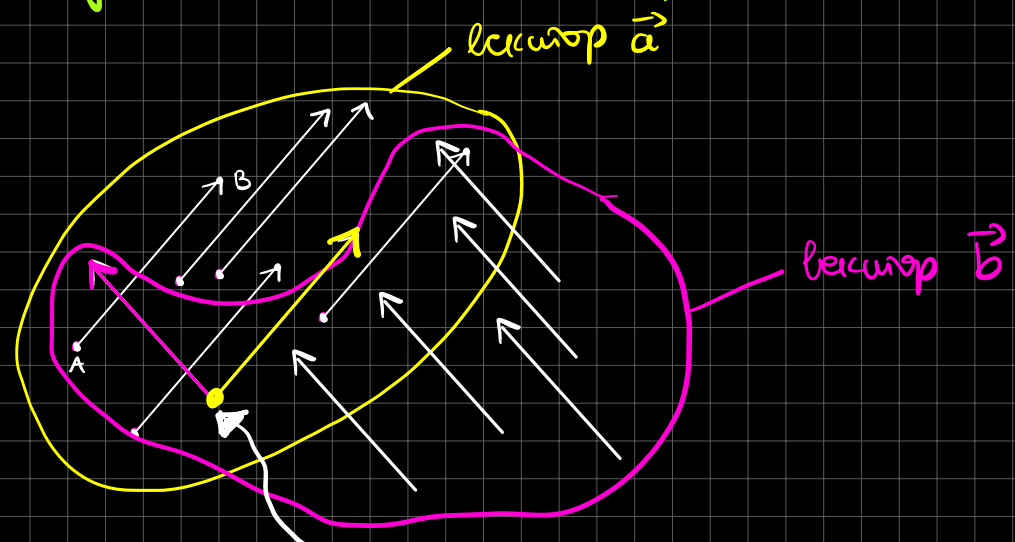
ВЕКТОР

Класа међусобно екв. дужи назива се геометријски вектор (ВЕКТОР).

$\vec{a}, \vec{b}, \ldots$

- Два вектора су једнака ако постоји ориј. дуж која представник оба вектора

-

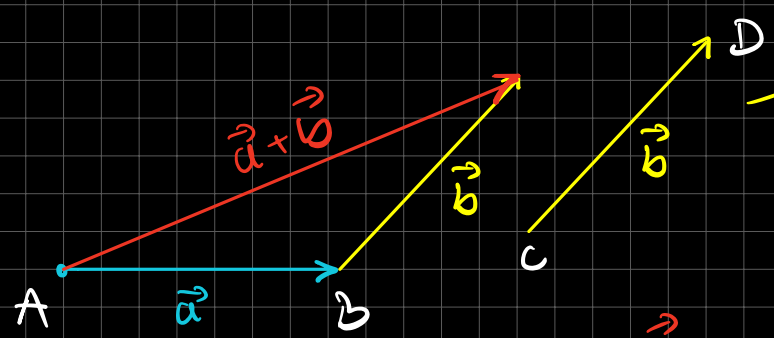


- Угао ∡ између 2 вектора једнак је ∡ између два њихова представника који имају заједнички почетак
- Два вектора су КОЛИНЕАРНА ако им одг. оријентисане дужи леже на истој правој.

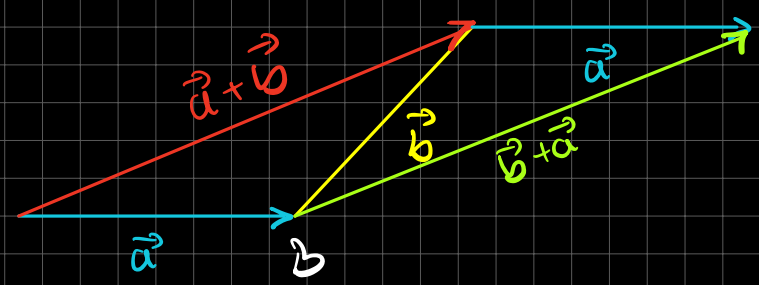
САБИРАЊЕ ВЕКТОРА

$\vec{a} = AB$

$\vec{b} = CD$



→ померамо почетак другог на крај првог



ОСОБИНЕ:

1° $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2° $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

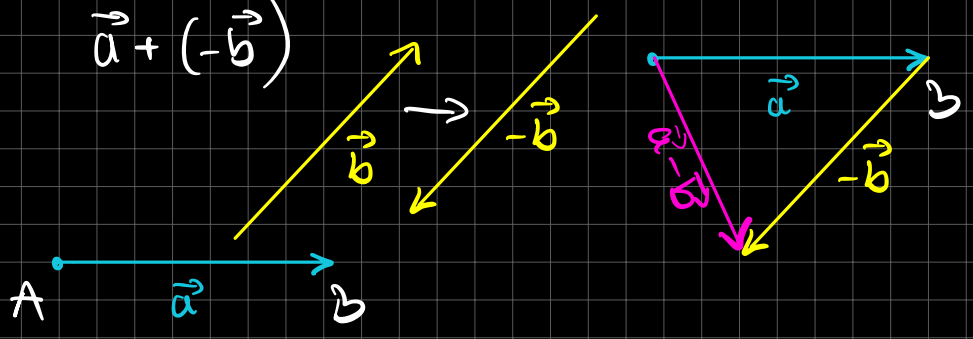
3° Нека нула вектор $\vec{0}$ одговара пару (A, A)

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

4° $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, где је $-\vec{a}$ са истим правцем и инт., али супр. смером

ОДУЗИМАЊЕ ? $\vec{a} - \vec{b} = ?$

$\vec{a} + (-\vec{b})$



МНОЖЕЊЕ ВЕКТОРА СКАЛАРЕМ

... $\vec{a}$, вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ једнак је вектору за који важи:

1° правац му је исти као правац од $\vec{a}$

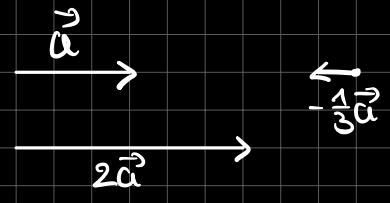
2° интензитет је једнак:

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \, |\vec{a}|$$

($|\vec{a}|$ ← интензитет; $|\lambda|$ ← апсолутна вредност)

3° смер је = смеру вектора $\vec{a}$ ако је $\lambda > 0$, а супротан смеру $\vec{a}$ ако је λ негативно.

пример:



ОСОБИНЕ:

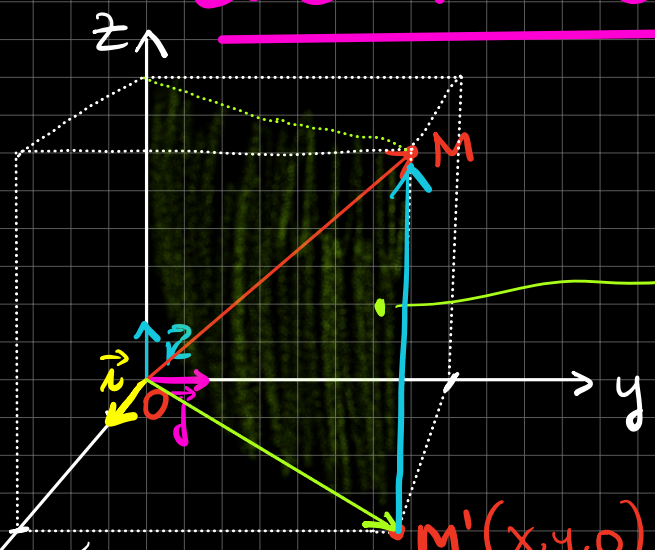
1° $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

2° $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{a}$

3° $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

4° $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta\vec{a}$

ДЕКАРТОВ ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ У ПРОСТОРУ



$|\vec{i}| = 1 \quad |\vec{j}| = 1 \quad |\vec{k}| = 1$

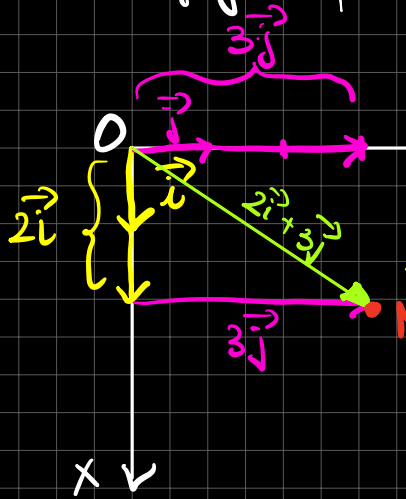
$\vec{OM}$ ↔ које су координате вектора $\vec{OM}$?

$\vec{OM} = (x, y, z)$

Зашто нас задате координате баш до тачке M?

нпр нека је $M(2, 3, 4)$

конструишемо раван XO

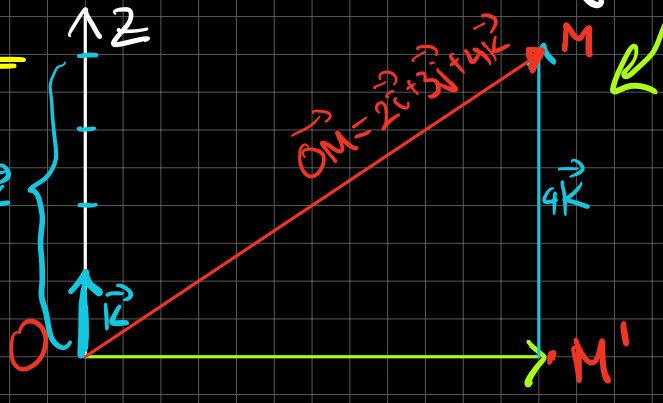


$2\cdot\vec{i}$ $3\cdot\vec{j}$

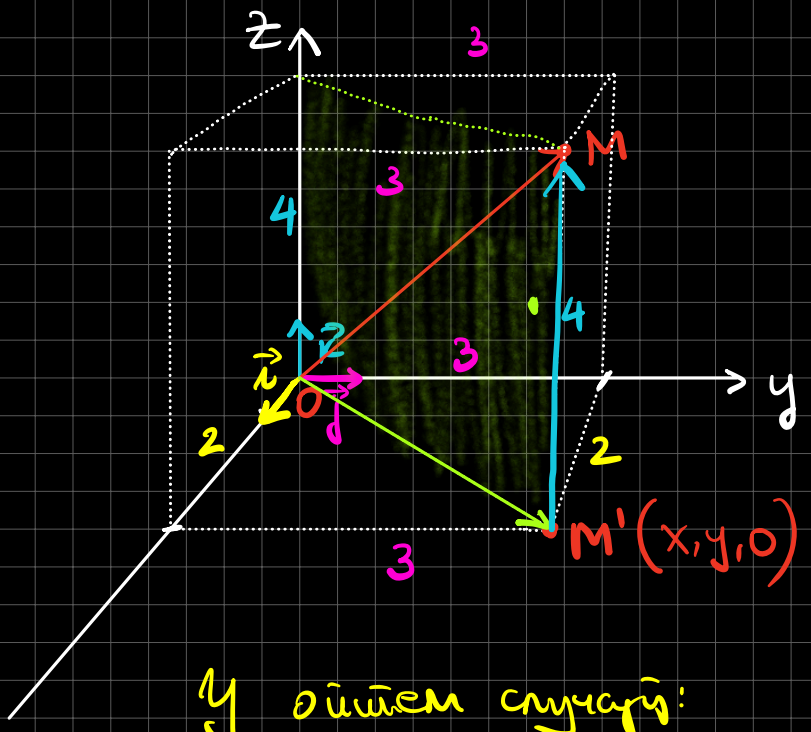
тачка је $2\vec{i} + 3\vec{j}$

Сада хоћемо да укључимо и трећу координату

Где нас води $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$



$\vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$



$\vec{a} = (a_x \cdot \vec{i}, a_y \cdot \vec{j}, a_z \cdot \vec{k})$

У општем случају:

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ што значи да је $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ су лин. НЕЗАВИСНИ...
- ... $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ чине максималан лин. независан скуп вектора, тј. сваки други скуп, који поред њих садржи још један вектор ⇒ ЛИН. ЗАВИСАН

Зато ови вектори могу чинити

ОРТОНОРМИРАНУ БАЗУ ТРОДИМЕНЗИОНОГ ПРОСТОРА

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

ДЕФ: СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ... $\vec{a} \cdot \vec{b}$ је СКАЛАР који се добија ...:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

ОСОБИНЕ

1° $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – комутативност

2° $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3° $\alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b})$

4° $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff$ један од вектора је $\vec{0}$ или $\vec{a}\perp\vec{b}$

5° $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

6° Шта ако су вектори задати координатама?

Колики је $\vec{a}\cdot\vec{b}=?$

$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$
$\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$
$\Big\}\ \vec{a}\cdot\vec{b}=?$

$$(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})\cdot(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k})=$$

$$a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+$$
$$+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}=(*)$$

$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1^2=1$, слично $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ јер $\vec{i}\perp\vec{j}$
$\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ јер $\vec{i}\perp\vec{k}$
⋮
итд

$(*)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

$\vec{a}=(2,3,4)$
$\vec{b}=(5,6,7)$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot5+3\cdot6+4\cdot7$
~~$=(2\cdot5, 3\cdot6, 4\cdot7)$~~

Ако желимо и угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на основу ове ф-ле

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

на основу ове

из $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

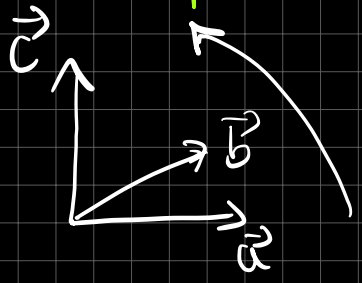
ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

ДЕФ: ВЕКТ. ПР. ДВА вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ је трећи вектор $\vec{c}$ ... :

1° $\vec{c}$ је нормалан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{c}\perp\vec{a},\vec{b})$

2° $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

3° вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образују ТРИЕДАР десне оријентације



ОСОБИНЕ:

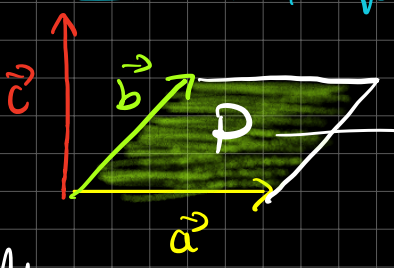
1° $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

2° $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ – дистрибутивност

3° $\alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

4° $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \iff$ бар један од вектора $\vec{0}$ или су вектори колинеарни

5° Интензитет $|\vec{a}\times\vec{b}|$ једнак је P ▱ конструисаног над $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$P = |\vec{a}\times\vec{b}|$

$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

спец. случај све ф-ле је површина правоугаоника, тј. $\sin\measuredangle = 1$

6° Шта ако су вектори задати координатама? Колики је $\vec{a}\times\vec{b} = ?$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

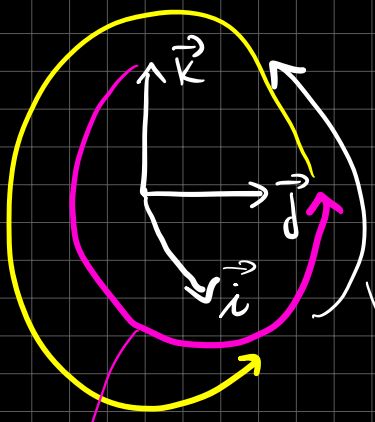
$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$

$$a_x b_x \vec{i}\times\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\times\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\times\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\times\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\times\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\times\vec{k} +$$

$$a_z b_x \vec{k}\times\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\times\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\times\vec{k} = (*)$$

$\vec{i}\times\vec{i} = 0$ jер | jер су колинеарни



$\vec{i}\times\vec{j} \Rightarrow$ нови вектор $\perp$ на $\vec{i}, \vec{j}$, а $\vec{k}$ је $\perp$ на $\vec{i}, \vec{j}$

интензитет?

$$|\vec{i}\times\vec{j}| = \underbrace{|\vec{i}|}_{1}\underbrace{|\vec{j}|}_{1}\underbrace{\sin\sphericalangle(\vec{i},\vec{j})}_{1} = 1$$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$

слично

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

$$(*) = a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$

$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

развој по I врсти следеће детерм

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6°

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ВЕКТОРА

ДЕФ: МЕШОВ. ПРОИЗВ. ВЕКТОРА $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ је СКАЛАР који је једнак скаларном производу $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

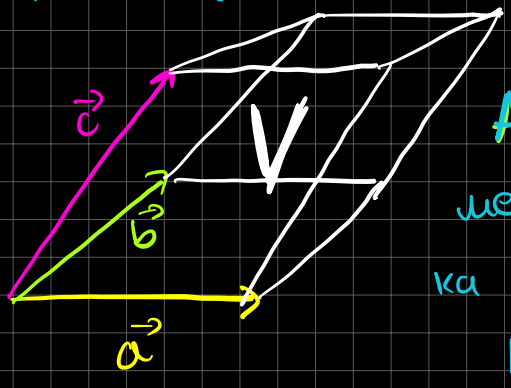
ОСОБИНЕ:

1° $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

2° $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff$ неки од њих је 0 или су вектори компланарни

3°



Апсолутна (!) вредност мешовитог производа $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ једнака је запремини паралелопипеда конструисаног над $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

4° Шта ако су вектори задати координатама? Колики је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$

извели малопре 6° особина за векторски

скаларно множење

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = [(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\cdot k]\cdot(c_x\cdot\vec{i} + c_y\cdot\vec{j} + c_z\cdot\vec{k})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)\cdot c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\cdot c_z =$$

развој по трећој врсти следеће дет.

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$