ДЕТЕРМИНАНТЕ

пермутације $\{1, 2, \ldots, n\}$

$n=3$:		инверзије?	
	1 2 3	0	
	1 3 2	1	$2 \to 3$
	2 1 3	1	$1 \to 2$
	2 3 1	2	$1 \to 2$, 213 , $1 \to 3$
	3 1 2	2	$1 \to 3$, 321 , $1 \to 2$
	3 2 1	1	$1 \to 3$

ДЕФ: Свакој кв. матрици $A_{n \times n}$ може се придр. број:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

на следећи начин:

$$\det A = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\lambda} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

... $\{1, 2, \ldots, n\}$, а λ је број инверзија...

$n=2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

← само!

$\{1, 2\}$ пермутације?

	инверзије
1 2	0
2 1	1

$$\det A = \sum_{12,\ 21} (-1)^{\lambda} a_{1j_1} a_{2j_2} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

← овде уписујемо пермутације

$n=3$?

1 2 3	0
1 3 2	1
2 1 3	1
2 3 1	2
3 1 2	2
3 2 1	1

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - \dots$$

↑ Комплементовано зајамчити

САРУСОВО ПРАВИЛО (само за 3x3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ОСОБИНЕ:

1° ... једнаки 0, онда је и детерм. $=0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2° ... Ако ел. неке врсте (колоне) ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА ел. неких других врста (колона) онда је и дет $=0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3) = (1) + 2(2)$$

3° ... врсте (колоне) ЗАМЕНЕ МЕСТА, дет мења знак.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

4° ... МНОЖИ НЕКИМ БРОЈЕМ ... једне врсте (колоне) помноже исти број.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

$$5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1\cdot 5 & 2\cdot 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\underline{5}\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot\underline{5} = 5\cdot(4-2\cdot 3) = 5(-2) = -10$$

5° ... елемент неке врсте (колоне) ПОМНОЖЕ СКАЛАРОМ и ДОДАЈУ другој врсти (колони), детерм. се НЕ МЕЊА.

$$\cdot 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\right.$$

6°

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

i-та колона је сасављена од збира

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i'}+a_{1i''} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni'}+a_{ni''} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i''} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni''} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ДЕФ: .. a_{ij} ел. у пресеку i-ше врсте и j-те колоне дет. D. Дет. D_{ij} реда $n-1$ која се добија .. i-ше врсте и j-ше колоне, назива се МИНОР

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad a_{23}=7 \Rightarrow D_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

ДЕФ: КОФАКТОР је по дефиницији $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{33}a_{21})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{D_{13}}$$

$$a_{11}\cdot D_{11} - a_{12}\cdot D_{12} + a_{13}\cdot D_{13}$$

$$a_{11}\cdot D_{11} + a_{12}\cdot(-D_{12}) + a_{13}\cdot D_{13}$$

$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

↑ razloj po I vrsti

TEOREMA: (RAZVOJ DETERMINANTE)

a) $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$

b) $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$, $\forall j \in \{1,2,\dots,n\}$

NAPOMENA:

a) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$, ako $i \neq k$

b) $a_{1j}A_{1\ell} + a_{2j}A_{2\ell} + \dots + a_{nj}A_{n\ell} = 0$, ako $j \neq \ell$

↑ radimo razloj po i-toj vrsti, ali uzimamo potpune kofaktore iz k-te vrste!

primer $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(4-6) + 1\cdot(2-6) = 2(-2) - 4 = -8$

II Način: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$

(·2)

МАТРИЦЕ (ДРУГИ ДЕО)

ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

ДЕФ: ИНВ. МАТР. ... $A_{n\times n}$ (у ознаци A^{-1}) је:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A$$

ДЕФ: АДЈУНГОВАНА матр. ... $A_{n\times n}$ (ознака $\operatorname{adj} A$) ... од A^T ... одговарајућим кофактором.

пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

пример

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \dots$$

1 ДЕФ. Кв. матр. је **РЕГУЛАРНА** ако јој је $\det \neq 0$.

ТЕОРЕМА: Кв. матр. има инверзну матр. A^{-1} ако и само је регуларна. Тада се инв. матр. рачуна по ф-ли

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Наћи } A^{-1}?$$

1° $\det A = ?$ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

2° $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3° $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Да ли важи $A^{-1} \cdot A = E$?

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1)(-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ТЕОРЕМА: Инв. матр. дате регул. квадр. матр. је јединствена.

ОСОБИНЕ:

1° $(A^{-1})^{-1} = A$

2° $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3° $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4° $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

РАНГ МАТРИЦЕ

ДЕФ: СУБМАТРИЦА (ПОДМАТРИЦА) облика $p \times q$ се добија од дате матр. $A_{m \times n}$ ... пресеком њених p-врста и q-колона.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}_{3\times 5} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ДЕФ: РАНГ матрице $A_{m \times n}$ је максималном реду регуларне квадратне подматрице матрице A.

- ред → димензија
- регуларне → $\det \neq 0$
- квадратне → максимално је 3 у овом примеру

пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

→ Ранг сигурно није 3 због последње врсте

Да ли је 2?

па нпр. подматрица $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ има дет $\neq 0 \Rightarrow rang = 2$

$$rang(A) = 2 \quad , \quad r(A) = 2$$

ДЕФЕНИЦИЈА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА МАТРИЦА

1° замена места двема вратама (колонама)

2° множење неке врате (колоне) бројем

3° множење неке врате (колоне) бројем и додавање некој другој врати (колони)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot 2 \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} -1 \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = B$$

ДЕФ: ЕКВИВАЛЕНТНА МАТРИЦА B датој матрици A...

$$A \sim B$$

ТЕОРЕМА: Еквивалентне матрице имају исти ранг.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} -1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rang(A) = ?$

$rang(B) = 2$

$$rang(A) = rang(B) = 2$$

ДЕФ: РАНГ дате матрице једнак је макс. броју лин. независних врста (колона) матрице A.

Трећа врста била лин. зависна од прве две врсте