ДЕФ: Број x_0 је нула (корен) k-тог реда (вишеструкости) полинома $P_n(x)$, $k \in \mathbb{N}$ ...:

$$(x-x_0)^k \mid P_n(x) \quad \text{и} \quad (x-x_0)^{k+1} \nmid P_n(x)$$

(тј. $P_n(x) = (x-x_0)^k \cdot P_{n-k}(x)$ и $P_{n-k}(x_0) \neq 0$)

k-тострукост ..
нула k-тог реда...

!!!

Т: Сваки полином степена n са коеф. из $\mathbb{C}$ се на јединств. начин ... :

$$P_n(x) = a_n (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_s)^{k_s},$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_s$ корени пол., а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ њихове вишеструкости.

ЛИНЕАРНА ФАКТОРИЗАЦИЈА ПОЛИНОМА

пример:
$$x^3+1 = (x-(-1)) \cdot (x^2-x+1)$$
$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

нпр. овај !

ТЕОРЕМА: Ако је $x_0 \in \mathbb{C}$ нула полинома са реалним коефицијентима, тада је и $\overline{x_0}$ такође нула тог полинома.

Чему нам ово служи..?

$$P_n(x) = a_n (x-x_1) \cdots (x-x_5) \cdots (x-x_{10}) \cdots (x-x_n)$$

ако је x_5 нека компл. корен, ми нађемо њему конјуговани, тир x_{10} и помножимо их!

$$(x-(a+bi))(x-(a-bi)) =$$
$$(x-a-bi)(x-a+bi) =$$
$$x^2 - ax + \cancel{bxi} - ax + a^2 - \cancel{abi} - \cancel{bxi} + \cancel{abi} - b^2 \overset{-1}{i^2} =$$
$$\underbrace{x^2 - 2ax + a^2 + b^2}_{\text{полином другог степена са коеф из } \mathbb{R}}$$

Сваки полином степ. n са коеф. из $\mathbb{R}$ се на јединствен начин може факт... :

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{q_1}(x^2+p_2x+q_2)^{q_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{q_m}$$

МИНЕАРНО-КВАДРАТНА ФАКТОРИЗАЦИЈА

ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

$n=2$ за $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ важи:

$$ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{a_0}{a_2} \end{aligned}}$$

... дају везу између корена полинома и коеф. полинома

$n=3$ за $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$= a_3(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2)(x-x_3)$

$= a_3(x^3 - x_3x^2 - x_2x^2 + x_2x_3x - x_1x^2 + x_1x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3)$

Сега изравняваме 2 полинома:

за x^3: $a_3 = a_3$

за x^2: $a_2 = -a_3(x_1+x_2+x_3) \Rightarrow x_1+x_2+x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$

за x: $a_1 = a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$

за x^0: $a_0 = -a_3x_1x_2x_3 \quad x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$

$$x_1+x_2+x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

ВИЕТОВИ Ф-ЛИ $n=3$

Общия случай?

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

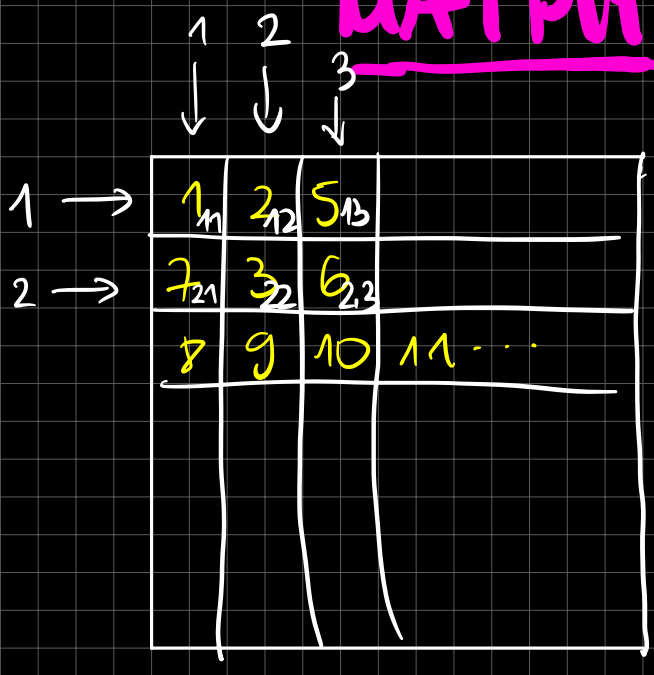
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2x_3 \cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

МАТРИЦЕ



	1	2	3	
1 →	1_{11}	2_{12}	5_{13}	
2 →	7_{21}	3_{22}	$6_{2,3}$	
	8	9	10	11 ...

правило како да пресликамо уређен пар у неки број

$\Rightarrow$ ФУНКЦИЈА

$(1,1) \to 1$

$(2,1) \to 7$

$(1,2) \to 2$

$(1,3) \to 5$

$(2,2) \to 3$

$(2,3) \to 6$

$\vdots$

ДЕФ: Функција која пресликава декартов производ скупова $\{1,2,\dots,m\}$ и $\{1,2,\dots,n\}$ у скуп реалних бројева назива се МАТРИЦА.

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

$\{1,2,\dots m\}$ врсте матрице

$\{1,2,\dots,n\}$ колоне матрице

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \\ \vdots & & & \\ (m,1) & (m,2) & \dots & (m,n) \end{matrix} \xrightarrow[\text{матрица}]{A} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

m - врста

n - колона

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

- ... ЈЕДНАКЕ, ако су истог типа и ако су им одговарајући елем. једнаки.
- ... НУЛА МАТРИЦА, означава се великом **O**.
- ... КВАДРАТНА..
-

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ГЛАВНА ДИЈАГОНАЛА кв. матр. типа $n \times n$ је уређена n-торка $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

- ... ДИЈАГОНАЛНА МАТРИЦА..
- ... ЈЕДИНИЧНА МАТРИЦА ,.. E, I, E_n, $E_{n \times n}$,...

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[1]$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ... E_2, I_3, ..

САБИРАЊЕ МАТРИЦА

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 3+5 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

.. могуће само исте типа ($m \times n$)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

ОСОБИНЕ

1° $A + B = B + A$

2° $(A + B) + C = A + (B + C)$

3° Нека је O - матрица типа $m \times n$, тада за сваку $A_{m \times n}$ важи:

$$A + O = O + A = A \quad \text{(НЕУТРАЛНИ ЕЛЕМЕНТ)}$$

4° Ако је $-A$ матрица СУПРОТНА матрици A, тј. матр. ...

$$A + (-A) = O$$
$$(-A) + A = O \quad \text{(СУПРОТНИ ЕЛЕМЕНТ)}$$

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦЕ БРОЈЕМ (СКАЛАРОМ)

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

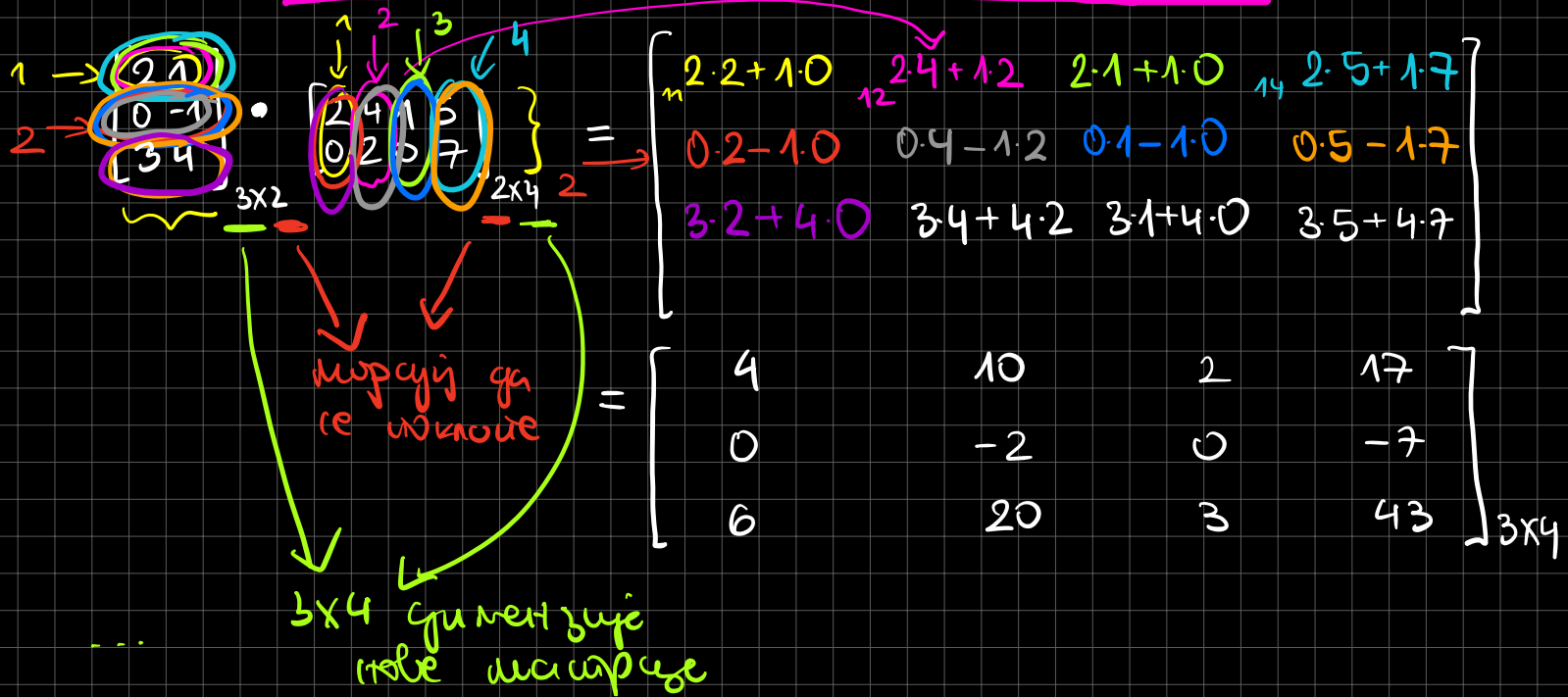
$\lambda \in \mathbb{R}$

ОСОБИНЕ

1° $\lambda(A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

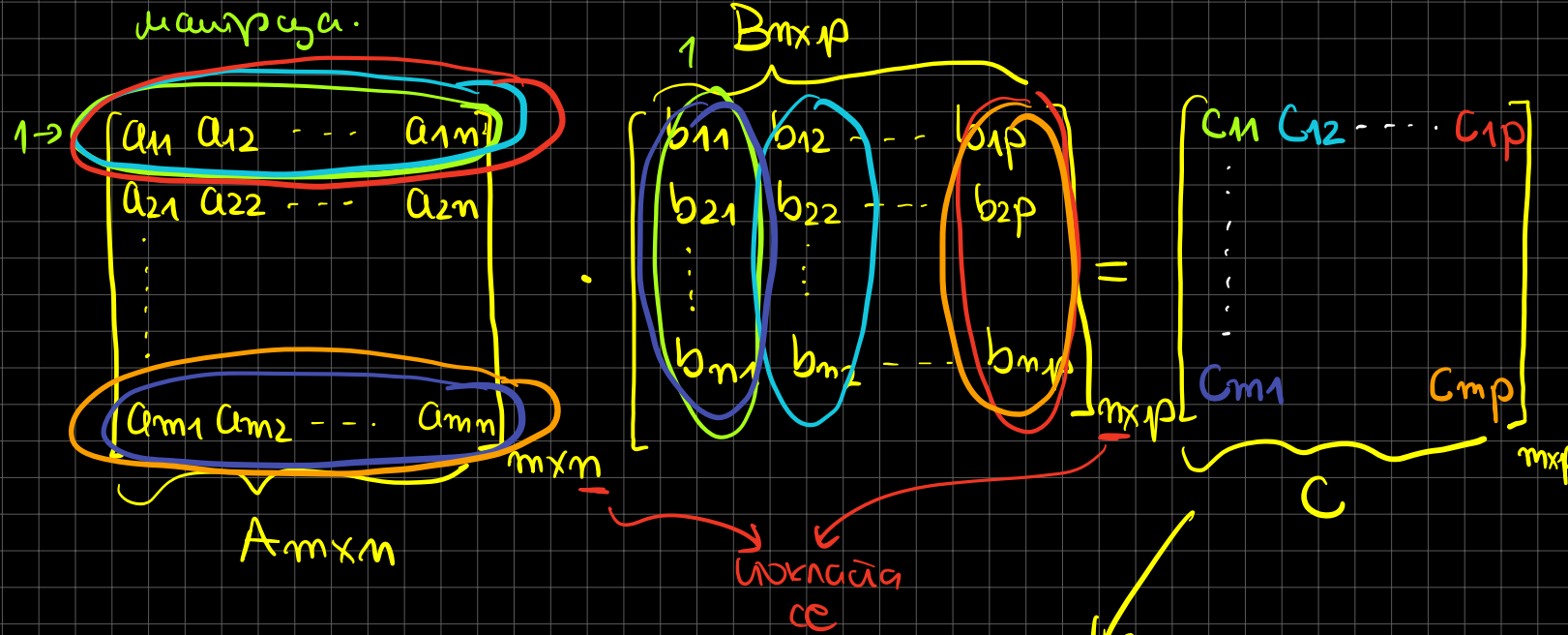
2° $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА



$$\begin{bmatrix} 2\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot5+1\cdot7 \\ 0\cdot2-1\cdot0 & 0\cdot4-1\cdot2 & 0\cdot1-1\cdot0 & 0\cdot5-1\cdot7 \\ 3\cdot2+4\cdot0 & 3\cdot4+4\cdot2 & 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot5+4\cdot7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -7 \\ 6 & 20 & 3 & 43 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

... резултат ће бити матрица која има исто врста као и прва, а колона колико друга матрица.



елемент C_{ij} добија из
i- те врсте матрице A
j- те колоне матрице B

ОСОБИНЕ

1° Није комутативно! $A \cdot B \neq B \cdot A$

2° $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, за $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times \ell}$

3° $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

4° $(B+C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

ТРАНСПОНОВАНА МАТРИЦА

.... $A_{m\times n}$ (у облици A^T) ...

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

ОСОБИНЕ

1° $(A^T)^T = A$

2° $(A+B)^T = A^T + B^T$

3° $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

4° $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$m\times n \quad n\times p$

$A^T \quad B^T$

$n\times m \quad p\times n$

$p\times n \quad n\times m$