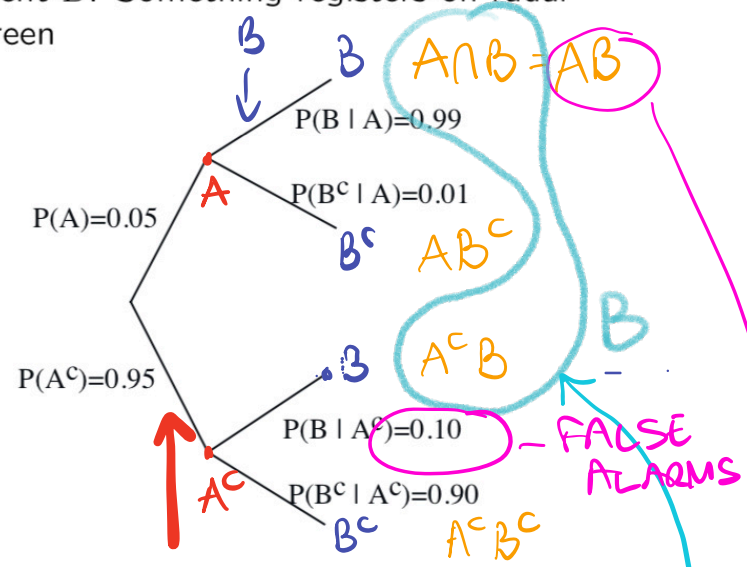
УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА (НАСТАВАК)

16.11.2026.

Models based on conditional probabilities

- Event A: Airplane is flying above
  Event B: Something registers on radar screen



$\mathbf{P}(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}05 \cdot 0.99 = 0.0495$

одавде

$\mathbf{P}(B) =$

$\mathbf{P}(A \mid B) =$

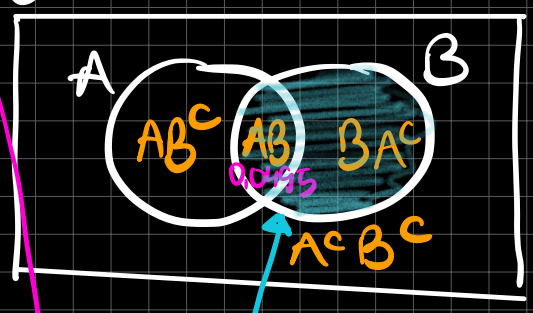
$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

A = "авион је на небу"

B = "радар је нешто регистровао"

	A	A^c
B^c	AB^c	A^cB^c
B	AB 0.0495	A^cB



$P(AB)$ ← добијамо тако што множимо вер. дух трана које нас воде до исхода AB

$P(B) = ?$ B је иница $B = AB \cup A^cB$

↓

Иница два дисјунктна догађаја

а3) АДИТИВНОСТ:
$A_1, A_2 \subset E$, $A_1A_2 = \emptyset$
$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$



а3) $P(AB \cup A^cB) = P(AB) + P(A^cB)$

$= 0.0495 + 0.095 = 0{,}1445$

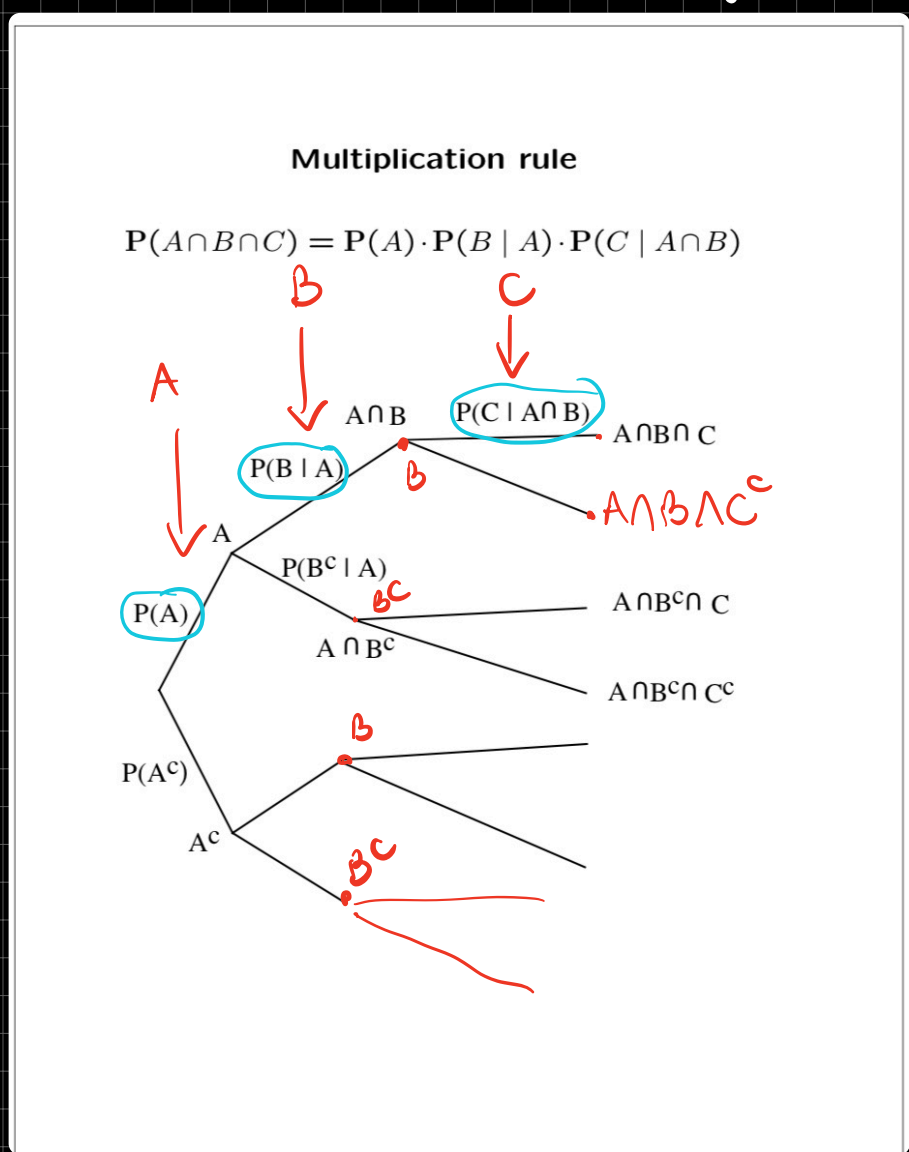
$P(A^c B) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$

$P(A|B) = ?$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.0495}{0,1445} = 0,34$$

ОСЕТЛИВОСТ = " болесној преподнаје као болесној"

СПЕЦИФИЧНОСТ = " здравој рећко третирамо као болесној"



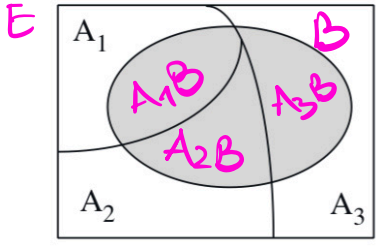
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

$= P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

Формула тоталне вероватноће

Total probability theorem

- Divide and conquer
- Partition of sample space into A_1, A_2, A_3
- Have $\mathbf{P}(B \mid A_i)$, for every i



- One way of computing $\mathbf{P}(B)$:

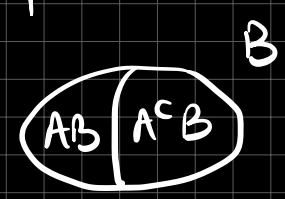
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B) = \quad & \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B \mid A_1) \\ + \quad & \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B \mid A_2) \\ + \quad & \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B \mid A_3)\end{aligned}$$

A_1 = "алиун је на небу"

A_2 = "јато птица је на небу"

A_3 = "нема ничега на небу"

Малопре:



A сада

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B)$$
$$= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3)$$

Ф-ла тоталне веров.

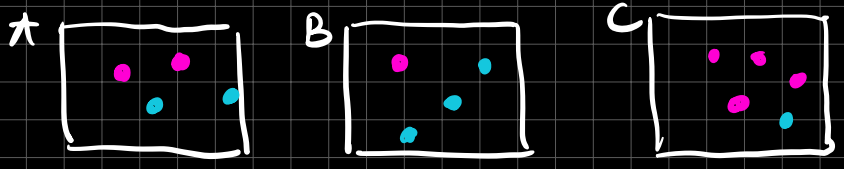
Може се проширити до произвољног n.

A_i ← хипотезе

Разлажу простор исхода E на подскупове $A_1, A_2, \ldots$ такве да:

- су међусобно дисјунктни
- њихова унија мора бити $= E$

пример: Имамо 3 исте кутије



Која је вероватноћа да смо изабрали плаву кутију?

P = " изабрали смо плаву"

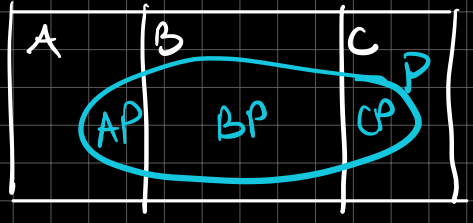
$p(P) =$

$p(P|A) = \frac{1}{2}$ $p(P|B) = \frac{3}{4}$ $p(P|C) = \frac{1}{5}$

Хипотезе су кутије (A, B, C)

$p(A) = \frac{1}{3}$ $p(B) = \frac{1}{3}$ $p(C) = \frac{1}{3}$

↑ вер. да смо одабрали кутију A



$p(P) = P(AP) + P(BP) + P(CP)$

$= P(A) \cdot p(P|A) + P(B) \cdot p(P|B) + p(C) \cdot p(P|C)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \dots$

БАЈЕСОВО ПРАВИЛО

A = " човек је на плажи" ← ХИПОТЕЗА

$p(A) = 0.05$ АПРИОРИ вероватноћа

тј. вероватноћа догађаја пре извођења експеримента

$p(A|B) = 0.34$ АПОСТЕРИОРИ вероватноћа

тј. вер. човек одабрани експеримента

$$p(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Бајесова ф-ла даје везу између ове две условне вероватноће

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

НЕЗАВИСНОСТ

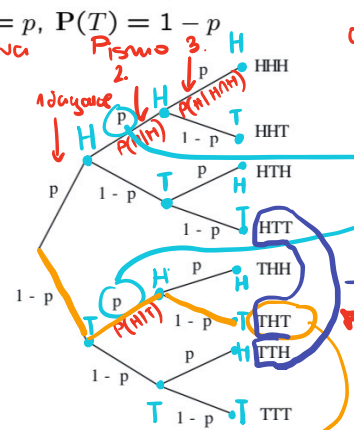
пример 3 узастопна бацања нетравилног новчића

$p(G) = p$, $p(P) = 1-p$

Models based on conditional probabilities

- 3 tosses of a biased coin:
  $\mathbf{P}(H) = p$, $\mathbf{P}(T) = 1 - p$

Glava Pismo



остаје нам вероватноћа p без обзира шта се десило раније → Ово својство се назива НЕЗАВИСНОСТ

— "пала је једна глава"

PGP Како добијамо p за низ догађаја

$\mathbf{P}(THT) = (1-p)\cdot p(1-p)$

Веров. мало компликоватијег догађаја?

$\mathbf{P}(1 \text{ head}) = p(HTT) + p(THT) + p(TTH) =$
$p(1-p)(1-p) + (1-p)\cdot p(1-p) + (1-p)(1-p)\cdot p = 3p(1-p)^2$

$\mathbf{P}(\underbrace{\text{first toss is H}}_{HTT} \mid \underbrace{1 \text{ head}}_{\text{"1 head"}}) =$

Интуиција каже: у ова 3 догађаја, нама „одговара" само 1 (први), а пошто су једнаковероватни

$\Rightarrow p = \frac{1}{3}$

$$\frac{p(\text{HTT} \cap \text{"1 head"})}{p(\text{"1 head"})} = \frac{p(\{\text{"HTT"}\} \cap \{\text{"HTT"}, \text{"THT"}, \text{"TTH"}\})}{3 \cdot p(1-p)^2} =$$

$$= \frac{p(\text{"HTT"})}{3p(1-p)^2} = \frac{p\cancel{(1-p)}\cancel{(1-p)}}{3 \cdot p\cancel{(1-p)^2}} = \frac{1}{3}$$

ДЕФ: Два догађаја су НЕЗАВИСНА ако важи

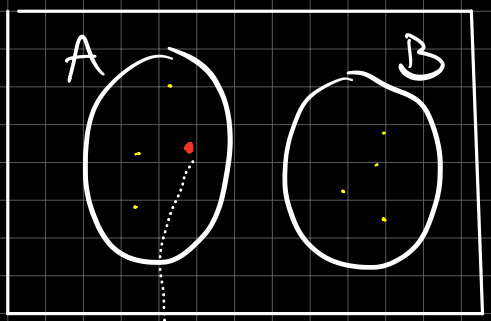
$$p(B|A) = p(B).$$

подсетимо се $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$

$$\Rightarrow \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

боље је ово узети за деф. јер не мора $p(A) \neq 0$

→ симетрична деф. важи и $p(A|B) = p(A)$



Да ли су ова догађаја независна?

Да?

Не мешати независност и дисјунктност!!!

Интуитивно:

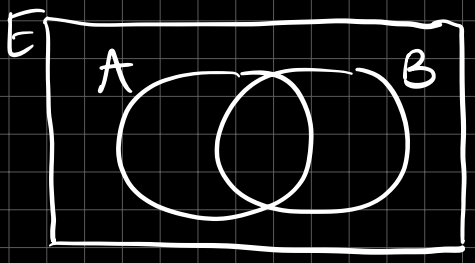
Ако се реализовао A сигурни смо да се B није реализовао! $\Rightarrow$ ЗАВИСНИ СУ!

$p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0 \Rightarrow p(A) \cdot p(B) \neq 0$

$AB = \emptyset \Rightarrow p(AB) = 0$

по ф-ли доказана зависност

$p(A) \cdot p(B) \neq p(AB)$



Ако је пресек непразан, не можемо одмах знати да ли су независни:

Нето мора да се провери једнакост

$$P(A)\cdot P(B) \overset{?}{=} P(A\cap B)$$

The king's sibling

- The king comes from a family of two children. What is the probability that his sibling is female?

$$E = \{\text{"ББ"}, \text{"БС"}, \text{"СБ"}, \text{"СС"}\}$$

ББ $\frac{1}{4}$	СБ $\frac{1}{4}$
БС $\frac{1}{4}$	СС $\frac{1}{4}$

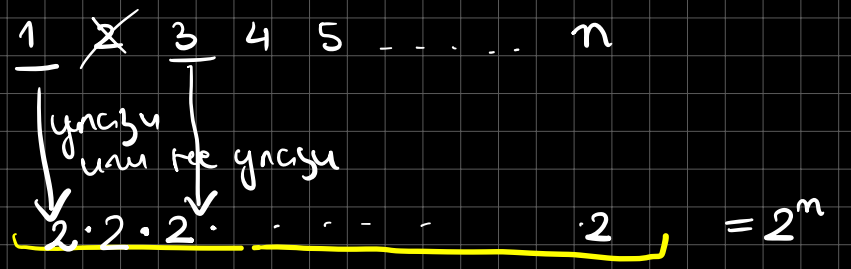
Условни модел B (имамо чињеницу да постоји син)

У ова два исхода је могуће да имамо ћерку

$$p = \frac{P(БС)+P(СБ)}{P(B)} \quad \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ

пример Одредити број подскупова скупа $\{1,2,\dots,n\}$



$$\underline{1}\ \cancel{2}\ \underline{3}\ 4\ 5\ \dots\dots\ n$$

улази или не улази

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \dots\dots \cdot 2}\ = 2^n$$

пример А колико постоји двочланих подскупова?

БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТ

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad 0! = 1$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{2!\ \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}$$

Број k-точланих подскупова скупа од n елемената

Колико има двочланих подскупова скупа од 5 елемената

пример

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

пример ВЕРОВАТНОЋЕ СА БИНОМН. КОЕФ

n независних бацања новчића, $p(G) = p$

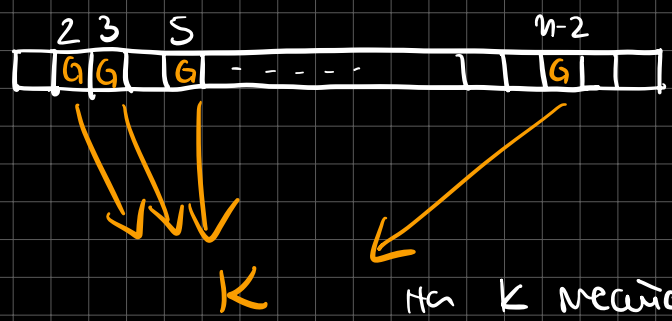
$$p(GPPGGG) = p(G)\,p(P)\,p(P)\cdot p(G)\cdot p(G)\cdot p(G) = p(1-p)(1-p)p\cdot p\cdot p$$
$$= p^4\cdot(1-p)^2$$

$$p(\text{секвенце}) = p^{\#\text{глава у секвенци}}\cdot(1-p)^{\#\text{писма у секвенци}}$$

$$p(k\ \text{глава}) = p^k(1-p)^{n-k}\cdot(\text{број секвенци које имају } k \text{ глава})$$

Колико их је?

Колико секвенци са k-глава постоји?



← n места (бацања)

На k места се "догодила" глава

На колико начина можемо изабрати k позиција за G

$$\Longrightarrow \binom{n}{k}$$

$$p(k \text{ глава}) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

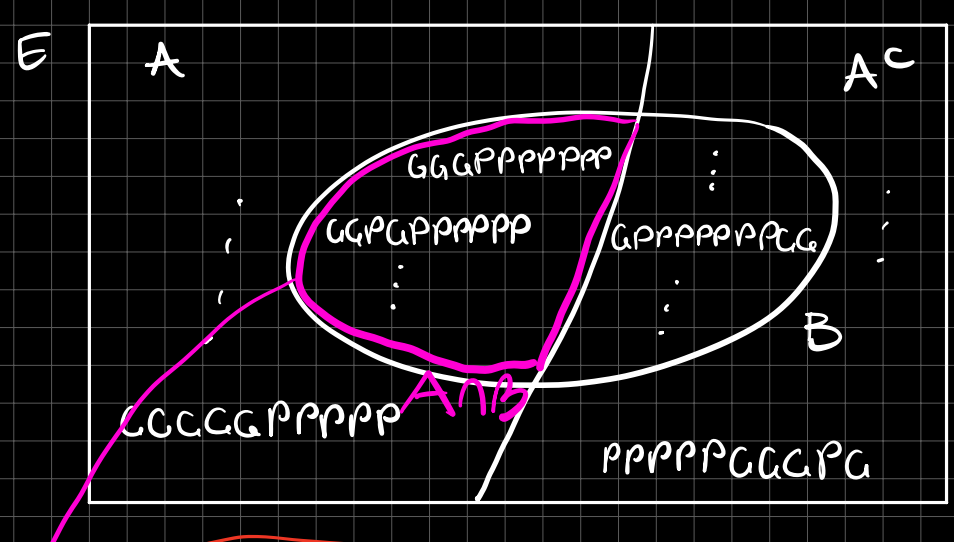
пример Шта би било

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

пример Бацамо новчић 10 пута. $p(G) = p$

Нека је B = " 3 од 10 бацања су G ".

Пт. да се B догодило. Колика је (условна) вероватноћа да је у прва два бацања добијена глава.



A = " у прва два бацања пала је G "

- Ако посматрамо цело E НЕМАЈУ све секвенце једнаку вероватн.

- Али ако постатрамо само B у њему су све секв. једнаковероватне и износе

$\Rightarrow p(\text{било које секвенце у } B) = p^3(1-p)^7$

- А колико има различитих секвенци у B? $\binom{10}{3}$

- $p(A|B) = ?$ Од свих догађаја у B, колико них почиње са 2 главе?

кардиналност (=број ел. скупа

$$\frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{|A\cap B|\cdot \cancel{p^3(1-p)^7}}{\binom{10}{3}\cdot \cancel{p^3(1-p)^7}}$$

Зато вероватноћу не морамо да укључујемо у рачун јер ће се скратити

$$= \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{8}{\binom{10}{3}} = (*)$$

Нето само бројимо елементе скупа

колико има повољних секвенци, делимо са колико има укупно секвенци

Колико их има?

GG_ _ _ _ _ _ _ _

прве 2 главе фиксиране

трећу главу шетамо на преосталих 8 места

$\Rightarrow$ тако добијамо 8 различитих секвенци

$$(*) = \frac{8}{\frac{\cancel{10}^{5}\cdot\cancel{9}^{3}\cdot 8}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Пример Штил од 52 карте се дели четворици трача. Наћи p да сваки од трача добије кеца.