matematika.tmf.bg.ac.rs

11.03

p_n – вероватноћа да у групи од n људи двоје слави рођендан истог дана

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \frac{365}{365 \cdot 365} = \frac{1}{365}$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{365^n - \overbrace{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)}^{n}}{365^n}$$

За које n нама ово p_n постаје веће од $1/2$

$$p_{22} < \frac{1}{2} < p_{23}$$

Случајни експерименти мирају да задовољавају:

[пример сл. експер. је бацање 2 коцкице за јамб]

1° унапред је деф. шта прашимо (нпр. •, •⁘, •⁘, ⁘, ...)

2° познати су сви могући исходи (има их 36: 11, 12, 13, ... 56, 66...)

3° може се понављати бесконачно много пута

4° исход појединачног експ. није познат

ЕЛЕМЕНТАРНИ ИСХОД – не може се разложити на простије исходе (нпр. •⁘, 2, 3, ... 12)

ако прашимо збир бројева на две коцкице

СКУП ЕЛЕМЕНТАРНИХ ИСХОДА

$E = \{ \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \ldots, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot; \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \}$

$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ← практично збир

$E = \{0, 1, 2\}$ ← практично колико је парних бројева пало...

пример Бацамо 2 новчића

$E = \{ \overset{\frac{1}{4}}{\text{ПП}}, \overset{\frac{1}{4}}{\text{ПГ}}, \overset{\frac{1}{4}}{\text{ГП}}, \overset{\frac{1}{4}}{\text{ГГ}} \}$

B = "пала је барем једна глава"

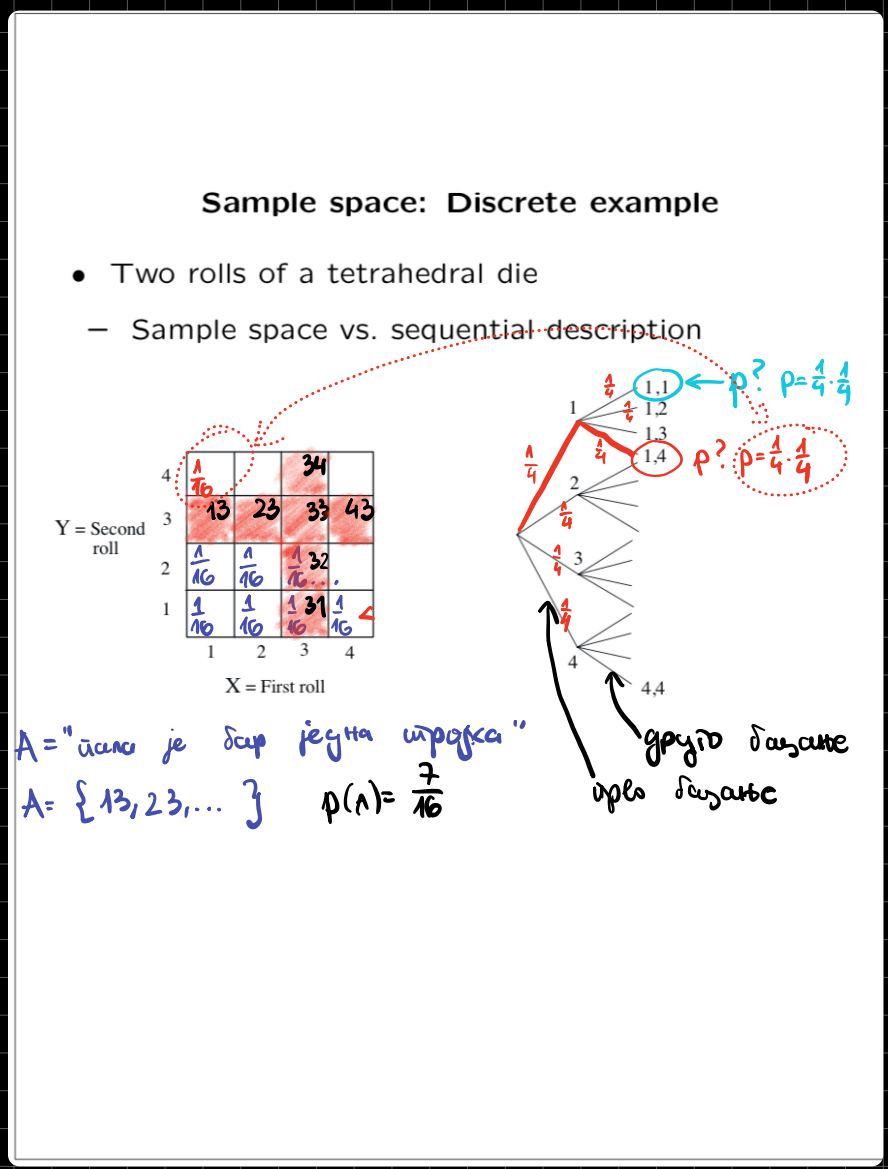
$B = \{\text{ПГ}, \text{ГП}, \text{ГГ}\}$, $p(B) = \frac{3}{4}$

СЛУЧАЈАН ДОГАЂАЈ

Догађај A = "новчићи су пали на исту страну"

$A = \{\text{ПП}, \text{ГГ}\}$

$p(A) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$



Бацај новчић док не добијем писмо.

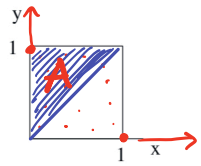
$E = \{\text{П}, \text{ГП}, \text{ГГП}, \text{ГГГП}, \ldots\}$

↑ скуп исхода не мора бити коначан

Sample space: Continuous example

E

$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$



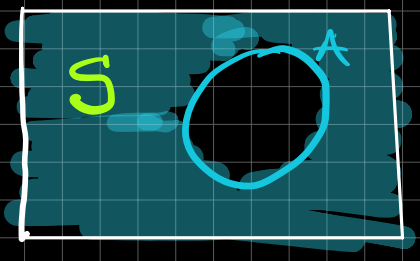
A = "X је мање од Y"

Догађај A се РЕАЛИЗОВАО (ОСТВАРИО) ако је исход експеримента неки исход из скупа A.

СИГУРАН ДОГАЂАЈ је догађај који се увек остварује.

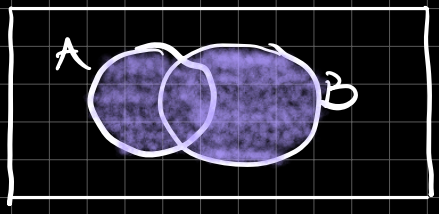
НЕМОГУЋ ДОГАЂАЈ је догађај који се никада не може остварити $A = \emptyset$

СУПРОТАН ДОГАЂАЈ S догађаја A је догађај који се остварује ако се A не остварује. $S = A^c$, $S = \bar{A}$



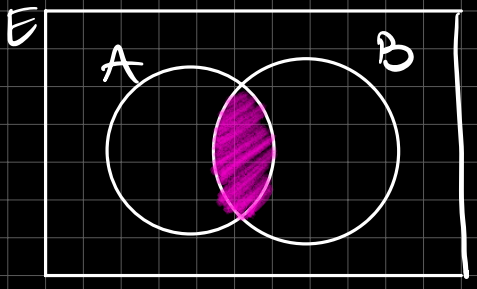


УНИЈА ДОГАЂАЈА A и B .. ако се реализује БАР ЈЕДАН од догађаја A или B.



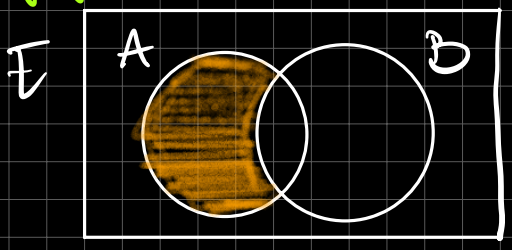
$A \cup B$

ПРЕСЕК ДОГАЂАЈА A и B ... ако се реализују и A и B.



$A \cap B$, AB

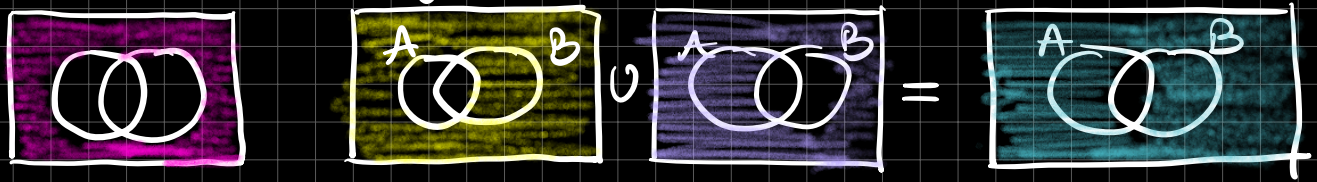
РАЗЛИКА ДОГАЂАЈА A и B .. се реализовао догађај A, али није B.



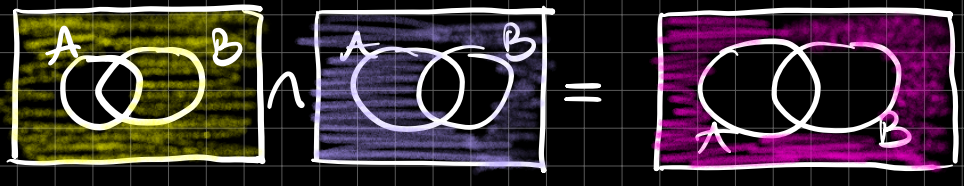
$A \setminus B$

ДЕ МОРГАНОВА ПРАВИЛА:

$\overline{A \cup B} \stackrel{?}{=} \bar{A} \cup \bar{B}$

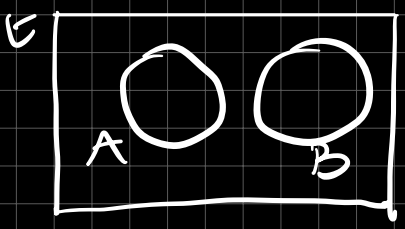


$\stackrel{?}{=} \bar{A} \cap \bar{B}$



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

УЗАЈАМНО ИСКЉУЧИВИ ако се не могу истовремено догодити $AB = \emptyset$



ВЕРОВАТНОЋА

Probability axioms

- **Event:** a subset of the sample space
- Probability is assigned to events

Axioms:

1. **Nonnegativity:** $\mathrm{P}(A) \geq 0$
2. **Normalization:** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
3. **Additivity:** If $A \cap B = \emptyset$, then $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

- $\mathrm{P}(\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}) = \mathrm{P}(\{s_1\}) + \cdots + \mathrm{P}(\{s_k\})$
  $= \mathrm{P}(s_1) + \cdots + \mathrm{P}(s_k)$

- Axiom 3 needs strengthening
- Do weird sets have probabilities?

Деф: Нека је дат скуп E. Ф-ја P дефинисана на подскуповима скупа E назива се ВЕРОВАТНОЋА ако има особине:

a1) НЕНЕГАТИВНОСТ: $P(A) \geq 0$

a2) НОРМИРАНОСТ: $P(E) = 1$

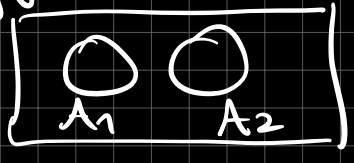
a3) АДИТИВНОСТ:

$A_1, A_2 \subset E$, $A_1 A_2 = \emptyset$

$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

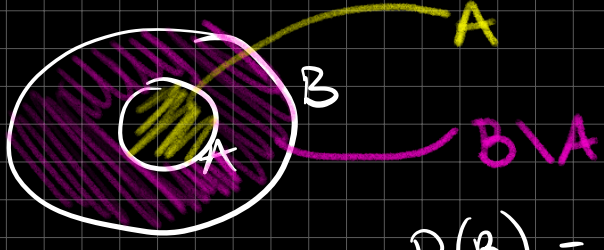
АКСИОМЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

САМО ОВО СУ ОСОБИНЕ?



ОСОБИНЕ:

1° $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



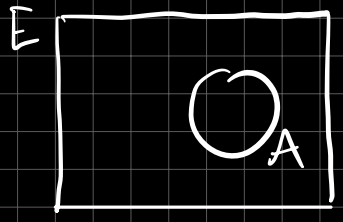
$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

(може се применити a3)

$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) \overset{a3}{=} P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$

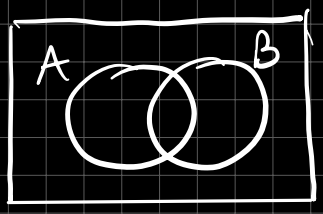
2° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



доказ преко аз

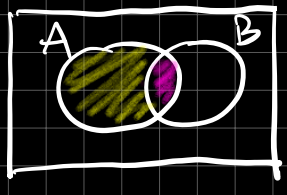
$A \cap \bar{A} = \emptyset$

3° $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



(аз) Адитивност:
$A_1, A_2 \subseteq E$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

4° $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$



5° $P(A) \leq 1$

Discrete uniform law

- Let all outcomes be equally likely
- Then,

$$P(A) = \frac{\text{number of elements of } A}{\text{total number of sample points}}$$

- Computing probabilities ≡ counting
- Defines fair coins, fair dice, well-shuffled card decks

КЛАСИЧНА (ЛАПЛАСОВА) ДЕФ. ВЕРОВАТНОЌЕ

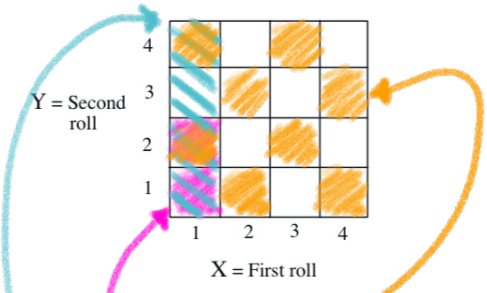
Нека је $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ коначан скуп од n једнаковероватних исхода, а случајан дог. A се састоји од k исхода. Тада број $P(A)$ зовемо вер. дог. A:

$$P(A) = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{број свих могућих}} = \frac{k}{n}$$

Статистическо дф. вероятността

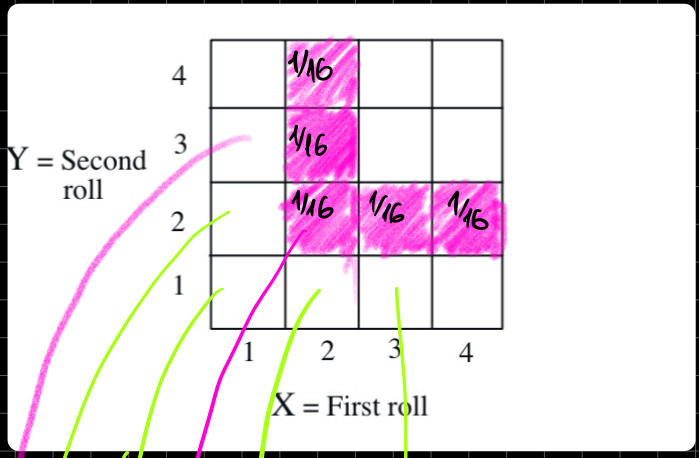
$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = P(A)$ ← рел. честота сл. А

Probability law: Example with finite sample space



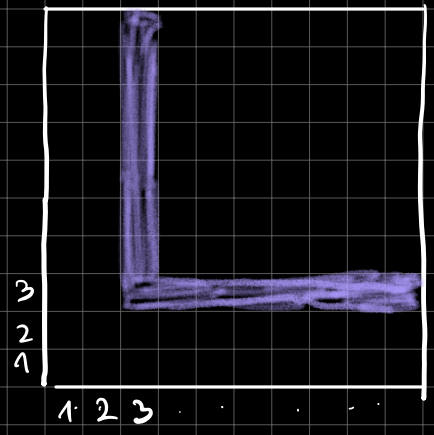
- Let every possible outcome have probability 1/16
  - $P((X,Y) \text{ is } (1,1) \text{ or } (1,2)) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
  - $P(\{X = 1\}) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
  - $P(X + Y \text{ is odd}) = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
  - $P(\min(X,Y) = 2) = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

~~15/16~~



(1,1) (2,1) min(2,1)=1≠2

min(2,2)=2



min(X,Y)=3

пример Имамо 12 кутица: 4Ц, 3Б, 5С

а) Вероватноћа да извучемо црну?

$$p(C) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

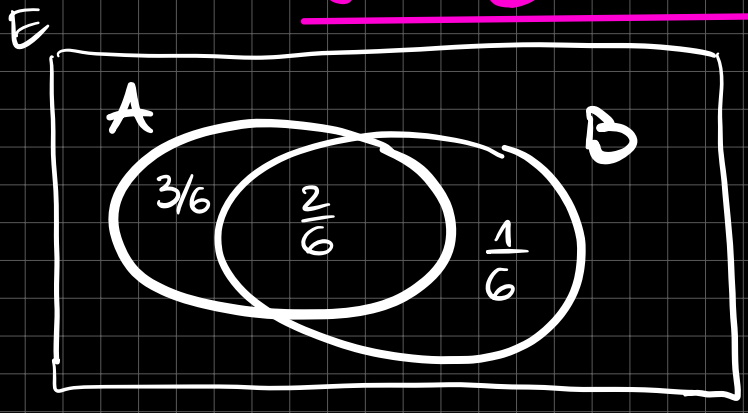
б) Вероватноћа да не извучемо црну?

I начин: извучемо белу или сиву

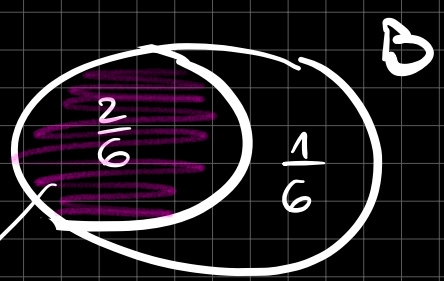
$$p(A) = \frac{3+5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

II начин: $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА



"B се догодило!"



B је постаје наш нови "СВЕТ"

Сада размишљамо $p(A|B)$

Која је сада вероватноћа да се догодило A?

- мора да остане исти однос међу вер.
- оне у збиру морају да дају 1

вероватноћа је сада $= \frac{2}{3}$ (а била је $\frac{5}{6}$)

ДЕФ: Пр. да је $P(B) \neq 0$. Тада је вер. дог. A под условом B једнака:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \left(= \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \right)$$

$P(A|B)$ је недефинисано ако је $P(B)=0$.

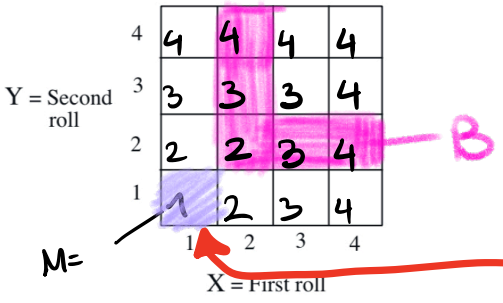
ПРАВИЛО ПРОИЗВОДА

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B | C) = P(A|C) + P(B|C)$$

Die roll example



$M=1$ само овде

- Let B be the event: $\min(X, Y) = 2$
- Let $M = \max(X, Y)$ ← неки број, а не догађај!
- $P(M = 1 \mid B) = 0$
- $P(M = 2 \mid B) = \frac{P(M=2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(22)}{5 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{1}{5}$