28.10.2026.

ДЕТЕРМИНАНТЕ

Пермутације? $\{1,2,\dots,n\}$ - скуп ← мењање места елементима скупа

Пермутације скупа од 3 елем $\{1,2,3\}$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\ 1&3&2\end{pmatrix}$ – 1 инверзију $2\to 3$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&1&3\end{pmatrix}$ – 1 инв: 1–2
$\begin{pmatrix}1&2&3\\ 2&3&1\end{pmatrix}$ – 2 инв: 1–3 (321), 3–2 (231)
$\begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&1&2\end{pmatrix}$ – 2 инв: 1–3 (321), 2–1 (312)
$\begin{pmatrix}1&2&3\\ 3&2&1\end{pmatrix}$ – 1 инв: 1–3

инверзија? ↓ замена места између 2 елемента

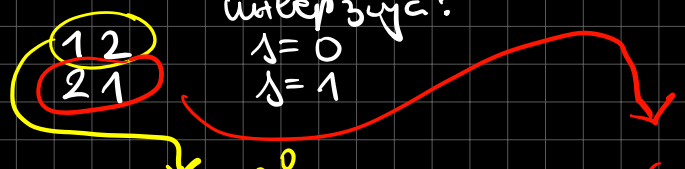
ДЕФ: Нека је $A_{n\times n}$ ...

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\lambda} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

где сума иде по свим пермут. скупа $\{1,2,\dots n\}$, а λ је број инверз. дате пермутације.

$n=2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Пермутације скупа $\{1,2\}$



исто као и ово

$\det A = (-1)^0 a_{1\underline{1}} a_{2\underline{2}} + (-1)^1 a_{1\underline{2}} a_{2\underline{1}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

пермутација

$n=3$:

123 – 0
132 – 1
213 – 1
231 – 2
312 – 2
321 – 1

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

САРУСОВО ПРАВИЛО – важи само за 3×3 !

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Како сумирају све ф-ле горе одједном?

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{s} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

123 – 0
132 – 1
213 – 1
231 – 2
312 – 2
321 – 1

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ОСОБИНЕ:

1° Ако су сви ел. неке врсте (колоне) ЈЕДНАКИ 0, онда је и детерминанта = 0

2° ... неке врсте (колоне) ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА ел. неких других врста (колона), онда је и дет = 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \qquad (1) + 2\cdot(2) = (3)$$

$1, 2, 5$ $\quad 1+2\cdot 2=5$ $\qquad$ $1, 3, 7$ $\quad 1+2\cdot 3=7$ $\qquad$ $1, 4, 9$ $\quad 1+2\cdot 4=9$

3° ... две врсте (колоне) замене МЕСТА, детерминанта МЕЊА ЗНАК.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1\cdot 5 - 2\cdot 4 = -(2\cdot 4 - 5\cdot 1)$$

$$-3 = -3$$

4° ... дет. се МНОЖИ НЕКИМ БРОЈЕМ, ... ако елементи једне врсте (колоне) помноже истим бројем.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 3\cdot 2 = 20 - 6 = 14$$

$$14\cdot 2 = \begin{vmatrix} 5\cdot 2 & 2 \\ 3\cdot 2 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot 2 = 40 - 12 = 28$$

5° ... неке врсте (колоне) помножене бројем и додате другој врсти (колони) ДЕТЕРМИНАНТА СЕ НЕ МЕЊА.

6°

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ & & & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ & & & & & \end{vmatrix}$$

i-та; i-та је састављена од збира

збир

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

ДЕФ: .. a_{ij} ел. који се налази у пресеку i-ите врсте и j-ите колоне. Детерм. D_{ij} реда $n-1$ која се добија од дет. D реда n изостављањем i-ите врсте и j-ите колоне, назива се МИНОР.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} \quad a_{23} \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

ДЕТ: КОФАКТОР A_{ij} је по дефр. $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} = (*)$$

по систематично прву врсту

$$a_{11} \Rightarrow D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$(*) = a_{11} \cdot D_{11} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$a_{12} \Rightarrow D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

$$(*) = a_{11} \cdot D_{11} - a_{12} \cdot D_{12} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$a_{13} \Rightarrow D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$\det A = a_{11} \cdot D_{11} - a_{12} \cdot D_{12} + a_{13} \cdot D_{13}$$

(A_{11}, A_{12}, A_{13})

Чиме је са кофакторима?

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = D_{11}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = -D_{12}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} D_{13} = D_{13}$$

Укратко, показати шта следеће:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

D_{11} → A_{11}

D_{12} → $= A_{12}$

D_{13} → $= A_{13}$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Развој по 1. врсти

ТЕОРЕМА (о РАЗВОЈУ ДЕТЕРМИНАНТЕ):

а) $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

РАЗВОЈ ПО i-тој врсти

б) $D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

РАЗВОЈ ПО i-тој колони

НАПОМЕНА

а) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$, $i \neq k$

б) $a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk} = 0$, $i \neq k$

↑

Кренули у развој по i-тој врсти, а узимамо ПОГРЕШНЕ (!) кофакторе (из k-те врсте), чиме је цео изр. $= 0$.

пример

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&0\\2&2&2\end{vmatrix}=(-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\2&2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}$$

a_{21}, a_{22}, $\cdot 2$

$$=-2\cdot(-1)(4-6)+1\cdot(2-6)$$

$$=2(-2)-4=-4-4=-8$$

II начин:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&0\\2&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+2\cdot2&2&3\\-2+2\cdot1&1&0\\2+2\cdot2&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&2&3\\0&1&0\\6&2&2\end{vmatrix}$$

(1) (2) (3), $\cdot 2$

развој по II врсти ⇒

$$=1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5&3\\6&2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot(10-18)=-8$$

МАТРИЦЕ (ДРУГИ ДЕО)

ДЕФ: ИНВЕРЗНА МАТРИЦА .. $A_{n\times n}$ (у ознаци A^{-1}):

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A$$

ДЕФ: АДЈУНГОВАНА .. $A_{n\times n}$ (.. $\operatorname{adj} A$) ... A^T

сваки ел. замени одговарајућим кофактором.

$a_{ij}\to A_{ij}$

пример $A=\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}$, $\operatorname{adj} A=?$

a_{12}

$$A^T=\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}$$

a_{21}, a_{22}

$a_{11}=1$ $\quad A_{11}?$ $\quad A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 2=2$

$a_{12}=3$ $\quad A_{12}=(-1)^{3}\cdot 3=-3$

$a_{21}=3$ $\quad A_{21}=(-1)^{3}\cdot 3=-3$

$a_{22}=2$ $\quad A_{22}=(-1)^{4}\cdot 1=1$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

Пример $\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ $\quad \operatorname{adj}B=?$

$$B^T=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$$ ← Не заборавај транспонирање!

$$\operatorname{adj}B=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5&8\\6&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&8\\3&9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4&7\\6&9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&7\\3&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&4\\3&6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4&7\\5&8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&7\\2&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\dots$$

ДЕФ: ... РЕГУЛАРНА ако број је детерм. различита од 0.

ТЕОРЕМА: Кв. матрица има инверзну матр. A^{-1}...

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj}A$$

Пример: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Намери A^{-1}.

1° $\det A$? $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ съществува A^{-1}

2° $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3° $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ +1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Проверка? $A^{-1} \cdot A \stackrel{?}{=} E$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

ОСОБЕНИЕ

1° $(A^{-1})^{-1} = A$

2° $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3° $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4° $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

РАНГ МАТРИЦЕ

ДЕФ: СУБМАТРИЦА (ПОДМАТРИЦЕ) реда $p \times q$ се добија од дате матр. $A_{m \times n}$ тако што се узму елементи који се налазе у пресеку жених p-врста и q-колона.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 5} \xrightarrow{\text{подматрица}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Највећи ред квадр. подматрице матрице $m \times n$ једнак је $\min\{m, n\}$

ДЕФ: РАНГ матрице $A_{m \times n}$ јесте максимални ред регуларне квадратне подматрице матрице A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ДЕФ. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ матрице су

1° Замена места двема врстама (колонама)
2° Множење неке врсте (колоне) скаларом
3° Множење неке врсте (колоне) скаларом и додавање неке друге врсти (колони)

ДЕФ: ЕКВИВАЛЕНТНА МАТРИЦА A B дакле матрици $A_{m\times n}$ је она матр. која се добија од матр. A применом елем. тр. коначан број пута

$$A \sim B$$

$A \neq B$!!!

ТЕОРЕМА: Еквивалентне матрице имају исти ранг.

ДЕФ: РАНГ дате матрице једнак је максималном броју лин. независних врста (колона) матрице A.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \overset{-2}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{-1}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rang A?

$2-2\cdot 1=0$ $\quad 5-2\cdot 2=1$ $\quad -1-2\cdot(-1)$ $\quad 8-2\cdot 3$