21.10.2026.

ДЕФ: Број x_0 је нула (корен) k-ог реда (k-тострукости) $\dots P_n(x)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$(x-x_0)^k \mid P_n(x) \quad \text{и} \quad (x-x_0)^{k+1} \nmid P_n(x)$$

(ил: $P_n(x) = (x-x_0)^k \cdot P_{n-k}(x)$ и $P_{n-k}(x_0) \neq 0$)

Сваки пол. степена n са коеф. из $\mathbb{C}$ (компл. коефиц.!) се на јед. начин може факторисати у облику:

$$P_n(x) = a_n (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_s)^{k_s},$$

где су $x_1, x_2, \dots, x_s$ корени полинома, а $k_1, k_2, \dots, k_s$ су њихови редови.

ЛИНЕАРНА ФАКТОРИЗАЦИЈА ПОЛИНОМА

ТЕОРЕМА: Ако је $x_0 \in \mathbb{C}$ (реални коеф.) нула полинома $P_n(x)$ са реалним коеф., онда је и $\overline{x_0}$ такође нула тог полинома.

ил: $P_n(x_0) = 0 \Rightarrow P_n(\overline{x_0}) = 0$

!!!

$$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$\vdots$ факторишемо и добијемо

$$P_n = a_n (x-x_0) \cdots (x-x_5) \cdots (x-x_{10}) \cdots$$

Ако је $x_5 \in \mathbb{C}$ онда негде међу факторима постоји и њему конјуговани. Нађемо га, нпр

.. множимо их..

$$\ldots (x-(a+bi))(x-(a-bi))\ldots$$

$$= (x-a-bi)(x-a+bi) \quad \leftarrow \text{оставимо без } i!$$

$$= x^2 - ax + \cancel{bxi} - ax + a^2 - \cancel{abi} - \cancel{bxi} + \cancel{abi} - b^2 i^2 \quad +b^2$$

$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

$\downarrow$

полином другог степена, без имаганарних јединица.

РЕАЛНИ КОЕФ.

Сваки пол. степена n са коеф. из $\mathbb{R}$ се на јединствен начин може факторисати у облику:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$$

ЛИНЕАРНО-КВАДРАТНА ФАКТОРИЗАЦИЈА

пример: $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$\downarrow$

стајемо овде јер ово нема реалних нула

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

$\boxed{2:}$ За квадратни полином $P_2(x) = \overset{a}{a_2}x^2 + \overset{b}{a_1}x + \overset{c}{a_0}$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{a_0}{a_2} \end{aligned}}$$

В.Ф-ЛЕ ДАЈУ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ КОРЕНА И КОЕФ. ПОЛИНОМА

ако и само ако су x_1, x_2 корени посматраног полинома

$\boxed{3:}$ За полином трећег степена?

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$= a_3(x^2 - x_2\cdot x - x_1\cdot x + x_1x_2)(x-x_3) =$$

$$= a_3(x^3 - x_3x^2 - x_2\cdot x^2 + x_2x_3x - x_1\cdot x^2 + x_1x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3) =$$

$$= a_3x^3 - a_3(x_1+x_2+x_3)\cdot x^2 + a_3\cdot(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\cdot x - a_3\cdot x_1x_2x_3$$

уз x^3: $a_3 = a_3$

уз x^2: $a_2 = -a_3(x_1+x_2+x_3)$

уз x: $a_1 = a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

уз x^0: $a_0 = -a_3x_1x_2x_3$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_0}{a_3} \end{aligned}}$$

ОПШТА Ф-ЛА:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

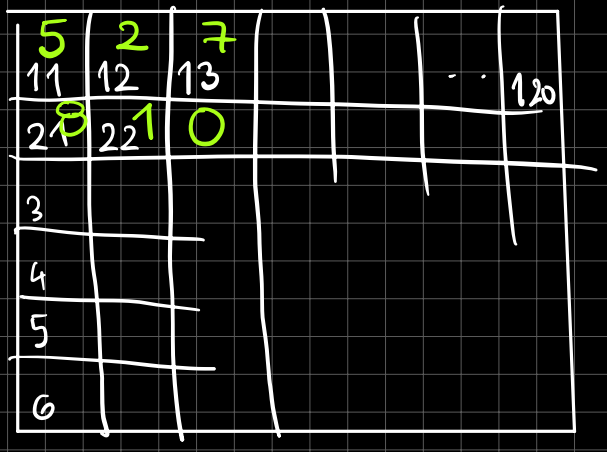
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

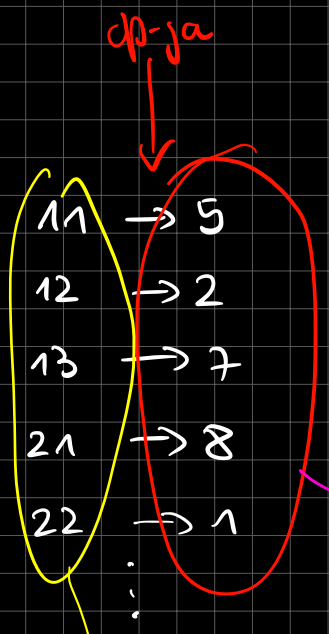
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

МАТРИЦЕ





ДЕФ: Фја која пресликава декартов производ скупова $\{1,2,\dots m\}$ и $\{1,2,\dots,n\}$ у скуп реалних бројева назива се МАТРИЦА

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$\{1,2,\dots,m\}$ — прва коорд. одабрге

$\{1,2,\dots,n\}$ — друга одабрге

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & (2,n) \\ \vdots & & & & \\ (m,1) & (m,2) & (m,3) & \cdots & (m,n) \end{matrix} \xrightarrow{A} \text{матрица}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

реални бројеви

$m \times n$

m врста
n колона
} тип (димензија) матрице

- .. ЈЕДНАКЕ ако су исте
исти и ако су им сви елем. ј-ки

- ... НУЛА матрица. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[0\ 0]$

- КВАДРАТНА има исти број врста и колона

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $[1]$ ..

- ГЛАВНА ДИЈАГОНАЛА квадр. матрице зовемо уређену n-торку $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

- ДИЈАГОНАЛНА МАТРИЦА

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

- ЈЕДИНИЧНА МАТРИЦА ... сви елементи на гл. дијагонали једнаки 1.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[1]$

I, E, $E_{n \times n}$, E_2, ..

САБИРАЊЕ МАТРИЦА

Да би се матрице сабрале, морају бити исте врсте

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

ОСОБИНЕ

1° $A+B=B+A$

2° $(A+B)+C=A+(B+C)$

3° Нека је O-матрица типа $m\times n$, тада за сваку $A_{m\times n}$ важи:

$$A+O=O+A=A$$

4° Ако је $-A$ матрица супротна матрици A, тј. матрица чији...

$$A+(-A)=O$$

$$(-A)+A=O$$

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦЕ СКАЛАРОМ

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

ОСОБИНЕ:

1° $\lambda(A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

2° $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА !!!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 4+1\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 5+1\cdot 7 \\ 0\cdot 2-1\cdot 0 & 0\cdot 4-1\cdot 2 & 0\cdot 1-1\cdot 0 & 0\cdot 5-1\cdot 7 \\ 3\cdot 2+4\cdot 0 & 3\cdot 4+4\cdot 2 & 3\cdot 1+4\cdot 0 & 3\cdot 5+4\cdot 7 \end{bmatrix}$$

морају да се поклапају

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -7 \\ 6 & 20 & 3 & 43 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Да би две матрице могле да се множе, .

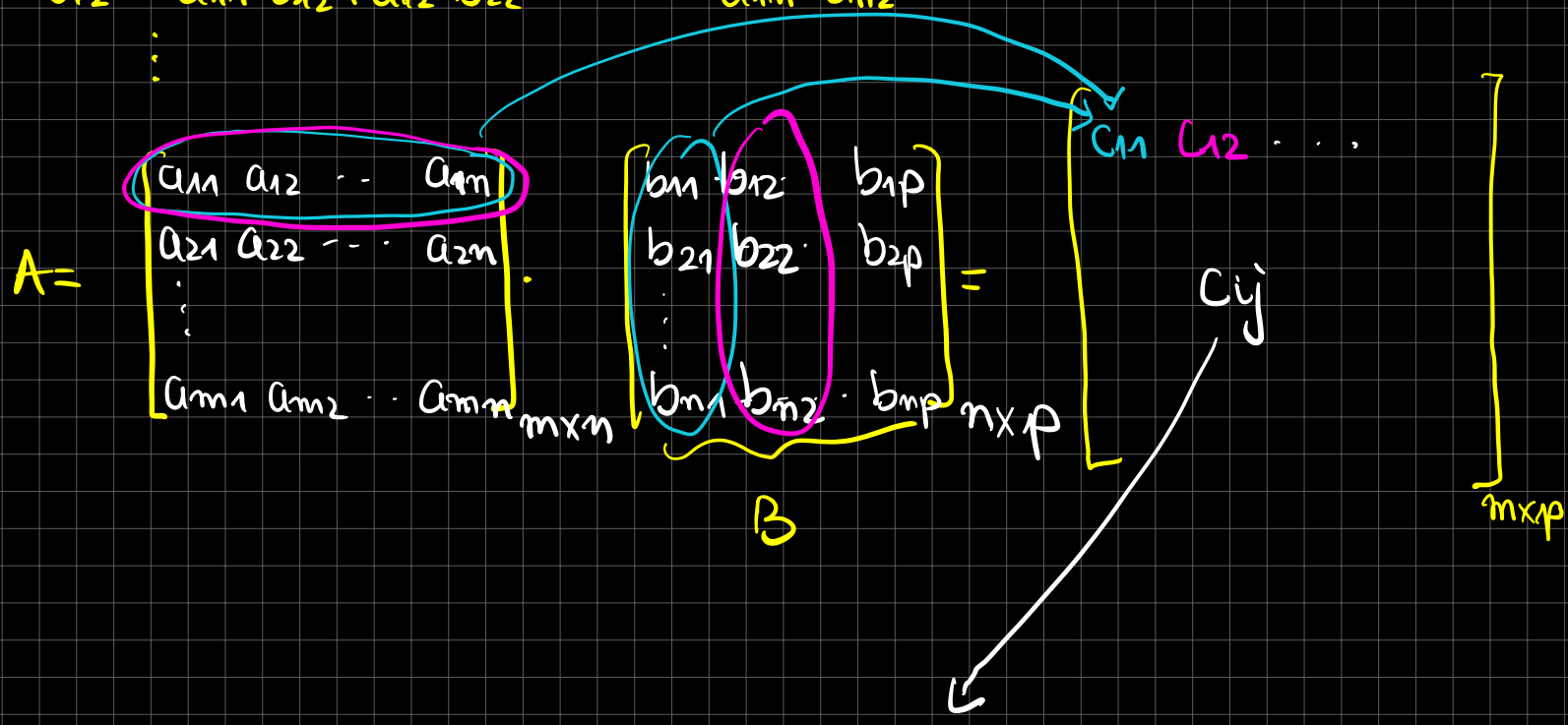
.. исто врста као прва, и исто колона као друга.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1m} \cdot b_{n1}$

$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1m} \cdot b_{n2}$

$\vdots$



Za c_{ij} uzimamo:

- i-tu vrstu iz A
- j-tu kolonu iz B

OSOBINE:

1° Nije komutativno! $A \cdot B \neq B \cdot A$

2° $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, za $A_{m \times n}, B_{n \times p}, C_{p \times s}$

3° $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, za $A_{m \times n}, B_{n \times p}, C_{n \times p}$

4° $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$, za $B_{m \times n}, C_{m \times n}, D_{n \times e}$

ТРАНСПОНОВАНА МАТРИЦА

... $A_{m\times n}$ (у ознаци A^T) је матрица која се добија ...

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

ОСОБИНЕ

1° $(A^T)^T = A$

2° $(A+B)^T = A^T + B^T$

3° $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$

4° $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p})^T$ $\quad B^T \to C$

$A^T \to D_{n\times m}$ $\quad B^T \to C_{p\times n}$