$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

ТЕОРЕМА: ... $z_1, z_2, \ldots, z_n$ дати к.б. $z_i = r_i(\cos\varphi_i + i\sin\varphi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ • ... $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$ једнаки

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) \right)$$

ТЕОРЕМА: .. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$ дати природан број.

$$z^n = r^n \left(\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha) \right)$$

ДЕЉЕЊЕ БРОЈА У ТРИГОНОМЕТРИЈСКОМ ОБЛИКУ

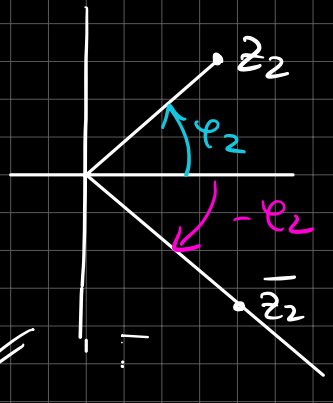
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $r_2 = |z_2|$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} =$$

$\frac{z_1}{z_2}$ остаје, $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = |z_2|^2 = r_2^2$

Шта је са $\bar{z}_2$?



$$\bar{z}_2 = r_2 \cdot (\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2^2} \cdot r_2 (\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \left(\cos\varphi_1 \cdot \cos(-\varphi_2) + i\sin\varphi_1\cos(-\varphi_2) + i\cos\varphi_1\sin(-\varphi_2) + \underbrace{i^2}_{-1}\sin\varphi_1\sin(-\varphi_2) \right)$$

$\cos\varphi_1\cos(-\varphi_2) - \sin\varphi_1\sin(-\varphi_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

$i\sin\varphi_1\cos(-\varphi_2) + i\cos\varphi_1\sin(-\varphi_2) = i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)}$$

Пример: $z_1 = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Одредити $\frac{z_1}{z_2}$?

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\Big(\underbrace{-\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{-\frac{2\pi}{4},\ -\frac{\pi}{2}}\Big) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\downarrow\ 0} + i\cdot\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\downarrow\ -1}\right) \leftarrow \text{тригон. запис}$$

Алгебарски?

$$= \frac{1}{2}\left(0 - i\right) = -\frac{i}{2}$$

КОРЕН КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

ДЕФ: Број z је n-ти корен од a, .. $z^n = a$

познато

$z^n = a$ ← Решавамо ову једначину!

непозната!

ово је познато $a = |a|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$

Уочимо следеће бројеве:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\dots,n-1$$

Проверимо да ли важи $(z_k)^n = a$?

$$(z_k)^n = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n \left(\cos\left(\cancel{n}\cdot\frac{\alpha+2k\pi}{\cancel{n}}\right) + i\cdot\sin\left(\cancel{n}\cdot\frac{\alpha+2k\pi}{\cancel{n}}\right)\right)$$

$\boxed{z^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha))}$

$$= |a|\left(\cos(\alpha+2k\pi) + i\cdot\sin(\alpha+2k\pi)\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

да ли смо добили ?

$a = |a|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$

увек треба да буде $\in(-\pi,\pi]$, па ја да свако k вратимо у тај интервал.

$\Rightarrow$ Закључујемо да су сваки z_k заиста решења ј-не $z^n = a$.

пример Решити ј-ну $z^3 = 1$.

Наћи $z = \sqrt[3]{1}$.

Наћи све отреће корене из 1...

Користимо ф-лу:

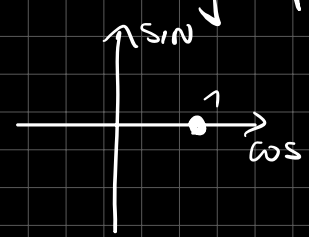
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$z^3 = 1 = a$ $\quad$ a нам треба записано у триг. облику

$a = 1\cdot(1 + 0\cdot i)$

α? $\cos\varphi$ $\sin\varphi$

$\varphi = 0$



$\Rightarrow$ $a = 1\cdot(\cos 0 + i\cdot\sin 0)$

$$\underset{z_0,\,z_1,\,z_2}{z_k} = \sqrt[\overset{3}{n}]{\underbrace{|a|}_{1}}\left(\cos\frac{\overset{0}{\alpha}+2k\pi}{\underset{3}{n}} + i\cdot\sin\frac{\overset{0}{\alpha}+2k\pi}{\underset{3}{n}}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$k=0,1,2$

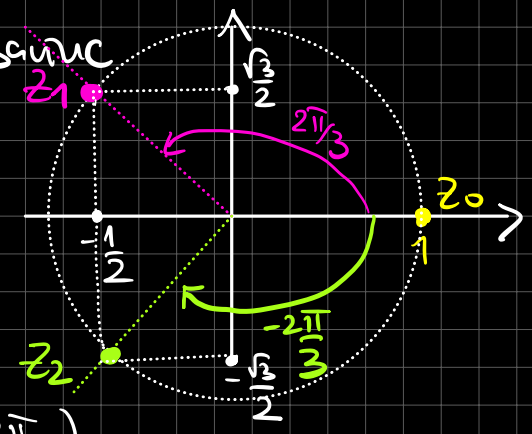
$k=0$:

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+0\cdot\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{0+0}{3}\right) =$$

$$= 1\ (\cos 0 + i\cdot\sin 0) \leftarrow \text{триг. запис}$$

$$= 1\cdot(1 + i\cdot 0)$$

$$= 1 \leftarrow \text{алгебарски запис}$$



$k=1$:

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right) \leftarrow \text{тригонометр. запис}$$

$$= -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \leftarrow \text{алгебарски запис}$$

$k=2$:

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right) \rightarrow \notin (-\pi, \pi]$$

да користиме $-\frac{2\pi}{3}$

$$= 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

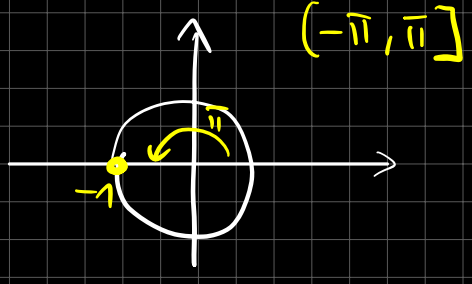
Пример Реши $z^4 = -1$.

-1 у триг. облику? $|-1| = 1$

$$-1 = 1\cdot(-1 + 0\cdot i)$$

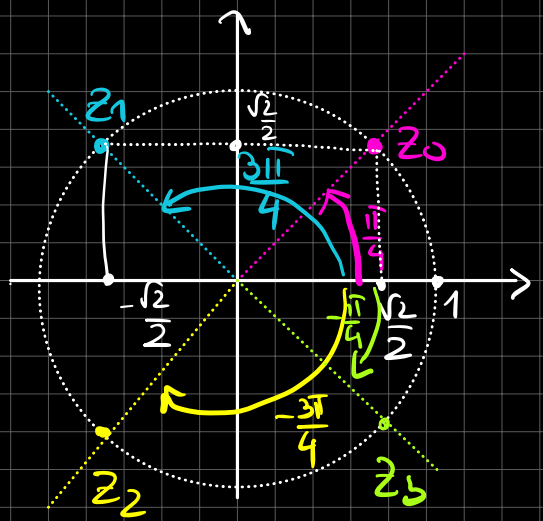
α? $\cos\alpha$ $\sin\alpha$

$$a = 1\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)$$



$$z_k = \sqrt[\overset{4}{n}]{\underbrace{|a|}_{1}}\left(\cos\frac{\overset{\pi}{\alpha}+2k\pi}{\underset{4}{n}} + i\cdot\sin\frac{\overset{\pi}{\alpha}+2k\pi}{\underset{4}{n}}\right), \quad k=0,1,2,3 \quad k=0,1,\dots,n-1$$

z_0, z_1, z_2, z_3



k=0:

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+0\cdot\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

k=1:

$$z_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

k=2:

$$z_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 1\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

k=3:

$$z_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ЗАКЉУЧАК: Јна $z^n = a$ у скупу $\mathbb{C}$ ... n-решења ... правилног многоугла која леже на истој кружници

ПОЛИНОМИ

ДЕФ: ... x је фја $P_n(x): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где су $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a_i – коефицијенти полинома
a_n – водећи члан
a_0 – слободан члан
n – ред (степен) полинома

пример:
$P_0(x) = 5$
$P_1(x) = 2x+1$ $\quad Q_1(x) = 100x$
$P_2(x) = x^2 + 6$
$\vdots$
$P_6(x) = i \cdot x^6 + 5 \cdot x^5 + 4$

ДЕФ: Два полинома су једнака ... одговарајући коеф. једнаки

пример: $x^3 + 5x^2 - x \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$

уз x^3: $1 = a$
x^2: $5 = b$
x: $-1 = c$
x^0: $0 = d$

ДЕФ: ... и ако је $P(x) = Q(x)$ за $\forall x \in \mathbb{C}$

$$P(x) \equiv Q(x)$$
$$P_n(x) \equiv Q_n(x) \dots$$

ДЕФ: КОРЕН (НУЛА) полинома $P_n(x)$ је $x_0 \in \mathbb{C}$ такав да важи $P_n(x_0)=0$

↓

Корен полинома = решење ј-не по x

$P(x)=x^2$ $\quad Q(x)=x+2$

$P(2)=4$ $\quad Q(2)=4$

$P(10)=100$ $\quad Q(10)=12$

Која је нула (корен)?

$Q(x)=0$?

$x+2=0$, $\quad x=-2$

$Q(-2)=0$

ДЕЉЕЊЕ ПОЛИНОМА:

$$\underbrace{(x^7-x^6+2x^4-3x)}_{P_n(x)} : \underbrace{(x^3+1)}_{Q_m(x)} = \underbrace{x^4-x^3+x+1}_{P_{n-m}(x)}$$

$$\begin{array}{l}
-x^7 \pm x^4 \\
\hline
\quad -x^6 + x^4 - 3x \\
\quad \mp x^6 \mp x^3 \\
\hline
\qquad x^4 + x^3 - 3x \\
\qquad -x^4 \pm x \\
\hline
\qquad\quad x^3 - 4x \\
\qquad\quad -x^3 \pm 1 \\
\hline
\qquad\qquad \underbrace{-4x-1}_{R_k,\ k<m}
\end{array}$$

хелимо да је степен $\leq$

Остатак

$$P_n(x) = Q_m(x)\cdot P_{n-m}(x) + R_k(x), \quad k<m$$

Ако је $R_k(x)\equiv 0 \Rightarrow P_n(x)$ дељив полином $Q_m(x)$

ДЕЛИЛАЦ, ФАКТОР, ..

ТЕОРЕМА ОСНОВНИ СТАВ АЛГЕБРЕ

Сваки п. $n \geq 1$ са коеф. из поља $\mathbb{C}$ има бар једну нулу у пољу компл. бројева.

БЕЗУОВА ТЕОРЕМА:

Остатак који се добија при дељ. пол. $P(x)$ са $x-a$ једнак је $P(a)$.

доказ: $P(x) = (x-a)\cdot S(x) + R_0(x)$

мора да буде 0, јер треба да је степена мањег од

$$P(x) = (x-a)\cdot S(x) + r$$

важи за свако x, па важи и за $x=a$

$$P(a) = \underbrace{(a-a)}_{=0}\cdot S(a) + r$$

$P(a) = r$, а то је и требало доказати.

пример $P_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $Q_m(x) = x-1$. Колим је остатак при дељењу $P_3(x)$ са $Q_m(x)$?

можемо пешке..

$$(x^3+x^2+x+1):(x-1) = \ldots$$

а можемо да искористимо Б. став.

Шта је a из Безуовог става? 1

$\Rightarrow$ остатак је $P(a) = P(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$

ПОСЛЕДИЦА: $P(a) = 0 \iff x-a \mid P(x)$

доказ: $\boxed{\Rightarrow:}$ Нека важи $P(a)=0$.

$P(x) = (x-a)\cdot S(x) + r$

искористимо $x=a$: $P(a) = (a-a)\,S(a) + r$

$0 = r$

$P(x) = (x-a)\cdot S(x) \Rightarrow x-a \mid P(x)$

$\Leftarrow$: Нека важи $x-a \mid P(x)$.

$P(x) = (x-a)\cdot S(x)$

ова важи за $\forall x$, па и за $x=a$

$P(a) = (a-a)\cdot S(a) = 0$

РАСТАВАЊЕ ПОЛИНОМА НА ЧИНИОЦЕ (ФАКТОРЕ):

$P_2(x) = x^2 - x - 6$

За $x=3$ важи $x^2 - x - 6 = 0$

$3^2 - 3 - 6 = 0$ ✓

$\Rightarrow x-3 \mid P_2(x)$ → Нашли смо 1 чинилац!

$(x^2 - x - 6) : (x-3) = x+2$

$\pm x^2 \mp 3x$

$2x - 6$

→ Нашли смо други чинилац!

$P_2(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

факторисали смо полином

У општем случају:

x_1 корен од $P_n(x) \Rightarrow x-x_1 \mid P_n(x) \Rightarrow P_n(x)=(x-x_1)\cdot P_{n-1}(x)$

x_2 корен од $P_{n-1}(x) \Rightarrow x-x_2 \mid P_{n-1}(x) \Rightarrow P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot P_{n-2}(x)$

x_3 корен од $P_{n-2}(x) \Rightarrow \ldots$

сторитам понављамо док не алитмемо до:

$$\boxed{P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\cdot a_n}$$

неки x_i могу бити једнаки!

пример x^2+2x+1

-1 је корен $\Rightarrow x-(-1) \mid x^2+2x+1$

$$x^2+2x+1=(x+1)\cdot P_1(x)$$

$$(x^2+2x+1):(x+1)=x+1$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2 \pm x} \\ \quad x+1 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$$

-1 је нула рода 2.