14.10.2026.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

ТЕОРЕМА: Нека су $z_1, z_2, \ldots z_n \ldots$ $z_i = r_i(\cos\varphi_i + i\sin\varphi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n) \right)$$

ТЕОРЕМА: ... $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ... $n \in \mathbb{N}$ дати природан број...

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

↑ МУАВРОВА ФОРМУЛА

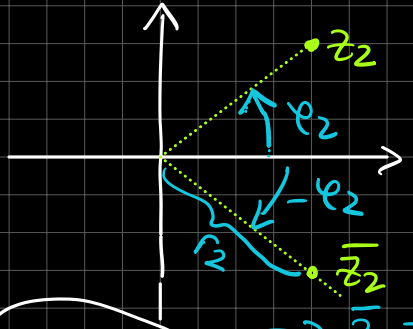
ДЕЉЕЊЕ БРОЈЕВА У ТРИГОНОМЕТРИЈСКОМ ОБЛИКУ

$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{r_2^2}$$

Како записујемо $\overline{z_2}$?



$\Rightarrow \overline{z_2} = r_2 (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))$

$$= \frac{r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2 (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\varphi_1\cdot\cos(-\varphi_2) + i\sin\varphi_1\cdot\cos(-\varphi_2) + i\cos\varphi_1\sin(-\varphi_2) + i^2\sin\varphi_1\cdot\sin(-\varphi_2)\right)$$

$\cos\varphi_1\cdot\cos(-\varphi_2) \to \cos(\varphi_1-\varphi_2)$

$i\sin\varphi_1\cdot\cos(-\varphi_2) + i\cos\varphi_1\sin(-\varphi_2) \to \sin(\varphi_1-\varphi_2)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)}$$

Пример $z_1 = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, Одредити $\frac{z_1}{z_2}$?

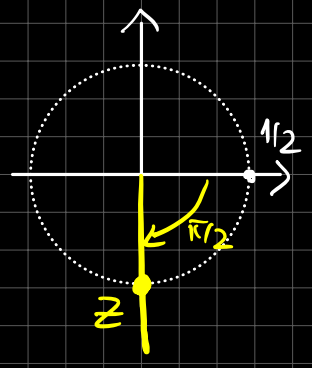
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\underbrace{-\frac{3\pi}{4}}_{-\frac{2\pi}{4}} + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + i\cdot(-1)\right)$$

$$= -\frac{i}{2}$$

$$= 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot i$$



КОРЕН КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

ДЕФ: ... z је n-ти корен комп. броја a, .. $z^n = a$.

$z^n = a$ — познато

z — непознато!

$a = |a|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ — познато

Решавамо једн. по z...

$x^3 = 1 \quad , \quad z^3 = 1$

Уочимо следеће комплексне бројеве:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Да ли важи да z_k задовољава $z^n = a$?

провера $(z_k)^n = ?$

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)\right) \leftarrow \text{примењујемо ф-лу}$$

$$(z_k)^n = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n\left(\cos\left(\cancel{n}\cdot\frac{\alpha+2k\pi}{\cancel{n}}\right) + i\cdot\sin\left(\cancel{n}\cdot\frac{\alpha+2k\pi}{\cancel{n}}\right)\right), \quad k=0,\dots,n-1$$

$$= |a|\left(\cos(\alpha+2k\pi) + i\sin(\alpha+2k\pi)\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

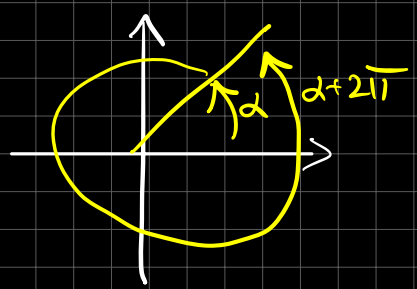
да ли је нешто?

$$a = |a|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$$

$k=0$: $\alpha+2k\pi = \alpha$ ✓

$k=1$: $\alpha+2\pi$

$k=2$:



враћамо се на нешти угао...

$$(z_k)^n = a$$

– може се показати да међу z_k-ојима НЕМА ЈЕДНАКИХ!

пример $z^3 = 1$ решити ј-ну.

Наћи $\sqrt[3]{1}$.

Наћи све треће корене из 1..

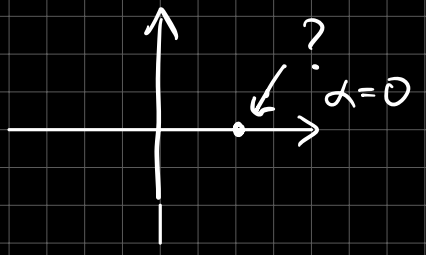
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$z^3 = 1 \longrightarrow$ треба пр. у трг. облику

$a = |a|(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$

$|1| = 1 \Rightarrow 1 = 1\cdot(1 + 0\cdot i)$

$\alpha?$ $\quad \cos\alpha \quad \sin\alpha$



$\alpha = 0$

$a = 1 = 1\cdot(\cos 0 + i\cdot\sin 0)$

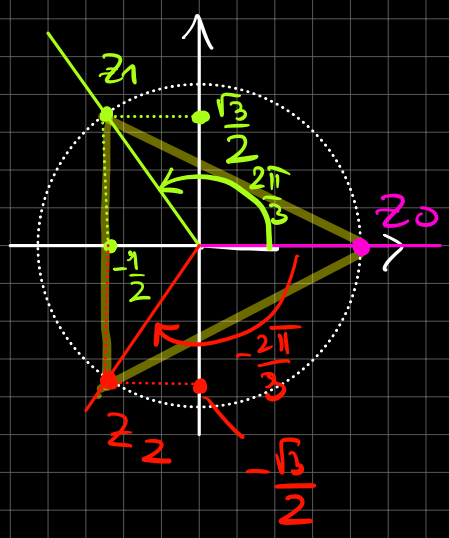
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$n \to 3$, $|a| \to 1$, $\alpha \to 0$, $k \to 0,1,2$, $n \to 3$, $k=0,1,2$

$z_k \to z_0, z_1, z_2$

$k=0$:

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+0\cdot\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{0}{3}\right)$$
$$= 1\cdot(\cos 0 + i\cdot\sin 0)$$
$$= 1\cdot(1 + i\cdot 0)$$
$$= 1$$



$k=1$:

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$k=2$: $z_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$= 1\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

Príklad Rieš rovnicu $z^4 = -1$.

-1 v goniom. obliku?

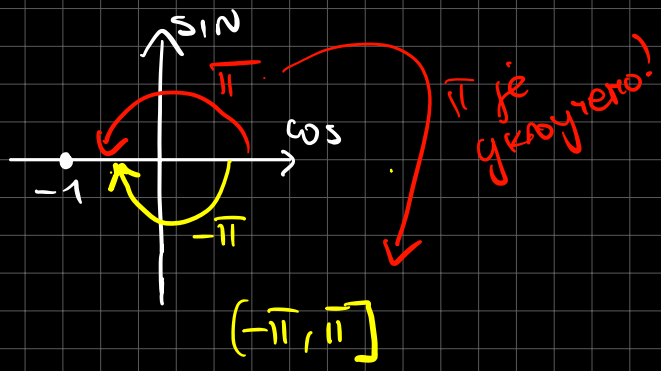
$|-1| = 1$

$-1 = 1\cdot(-1 + 0\cdot i)$

α? $\cos\alpha$ $\sin\alpha$

$\alpha = \pi$

$a = -1 = 1\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)$



$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,3$$

$k = 0,1,\ldots,n-1$

z_0, z_1, z_2, z_3

$k=0$: $z_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+0}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

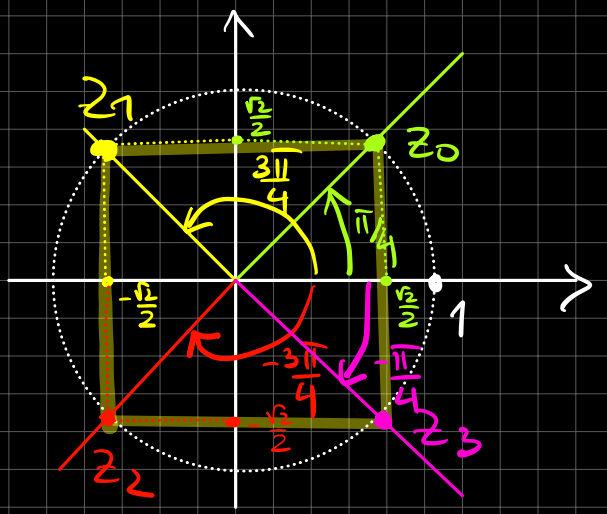
$k=1$: $z_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=2$: $z_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ← vrátane v $(-\pi, \pi]$

$= 1\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$



$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\underline{k=3:}$ $z_3 = \ldots = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

ЗАКЉУЧАК: Ј-на $z^n = a$ у скупу $\mathbb{C}$ ... n-решења, ... n-тоугла ... истој кружници.

ПОЛИНОМИ

ДЕФ: Полиноми по пр. x је ф-ја $P_n(x): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ...

$$P_n(x) = a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_1\cdot x + a_0,$$

.. $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

a_i – коефиц. полинома (a_0 – слободан члан, a_n – водећи коеф.)

n – ред/степен полинома

ДЕФ: ... ЈЕДНАКА .. истог степена .. $P(x) = Q(x)$ за $\forall x \in \mathbb{C}$.

$$P(x) \equiv Q(x)$$
$$P_n(x) \equiv Q_n(x)$$

ДЕФ: ... ЈЕДНАКА .. истог степена ... коеф. ј-ки.

пример: $x^3 + 5x^2 - x \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$

x^3: $1 = a$

x^2: $5 = b$

x^1: $-1 = c$

x^0: $0 = d$

$$x^3 + 5x^2 - x = \cancel{0}$$

ДЕФ: КОРЕН (НУЛА) полинома $P_n(x)$ је $x_0 \in \mathbb{C}$ тиме да важи $P_n(x_0) = 0$.

КОРЕН ПОЛИНОМА = РЕШЕЊЕ ЈЕ ПО x

$\downarrow$

$P_n(x) = 0$

ДЕЉЕЊЕ ПОЛИНОМА

делилац — количник

$P_7(x) : Q_3(x) = P_4(x)$

$$(x^7 - x^6 + 2x^4 - 3x) : (x^3 + 1) = x^4 - x^3 + x + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
-x^7 \pm x^4 & \\
\hline
-x^6 + x^4 - 3x & \\
\mp x^6 \mp x^3 & \\
\hline
x^4 + x^3 - 3x & \\
-x^4 \pm x & \\
\hline
x^3 - 4x & \\
-x^3 \pm 1 & \\
\hline
-4x - 1 & \text{остатак}
\end{array}$$

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot P_{n-m}(x) + R_k(x), \quad k < m$$

$Q_m(x)$ — делилац; $P_{n-m}(x)$ — количник; $R_k(x)$ — остатак

$R_k(x) \equiv 0 \Rightarrow P_n(x)$ дељив полиномом $Q_m(x)$

$Q_m(x) \mid P_n(x)$

$Q_m(x)$ — Делилац, фактор, чинилац, ...

ТЕОРЕМА (ОСНОВНИ СТАВ АЛГЕБРЕ)

Сваки полином ... $n \geq 1$ ... $\mathbb{C}$ има БАР ЈЕДНУ НУЛУ у скупу $\mathbb{C}$.

БЕЗУОВА ТЕОРЕМА: ОСТАТАК .. $P(X)$ са $X-a$ .. $P(a)$.

$P(X) = X^7 - X^6 + 2X^4 - 3X$

$2^7 - 2^6 + 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2$

$X-2$ $\rightarrow$ остатак ће бити $P(2)$

доказ: $P(X) = (X-a) \cdot S(X) + R_0(X)$

↓ степен је 1 ← мора бити мањи од 1 $\Rightarrow 0$

$\Rightarrow R_0(X)$ је константа, нпр. r

$P(X) = (X-a) \cdot S(X) + r$

Важи за $\forall X$ па и за $X=a$:

$P(a) = \cancel{(a-a) \cdot S(a)}^{0} + r$

$\Rightarrow r = P(a)$

ПОСЛЕДИЦА: $P(a)=0 \iff X-a \mid P(X)$

доказ: $\boxed{\Rightarrow:}$ Претпостављамо да. важи $P(a)=0$.

$P(X) = (X-a) \cdot S(X) + r$

$\Rightarrow P(a) = \cancel{(a-a) \cdot S(a)}^{0} + r$

$P(a) = r \Rightarrow r = 0$

↑ тачно је остатак $=0$

$\Rightarrow X-a \mid P(X)$

$\boxed{\Leftarrow:}$ тј. $X-a \mid P(X)$

$P(X) = (X-a) \cdot S(X)$

Важи за $\forall x$, па и за $x=a$:

$$P(a) = (a-a)\cdot S(a) = 0$$

Пример: $P_2(x) = x^2 - x - 6$

Корен је решење $x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow$ корен $x_0 = 3$ $\quad (3^2 - 3 - 6 = 0)$

последица $\Rightarrow$ $x-3 \mid P_2(x)$

$$(x^2 - x - 6) : (x-3) = x+2$$

$$\underline{-x^2 \mp 3x}$$

$$2x - 6$$

$$\Rightarrow P_2(x) = (x-3)(x+2)$$

РАСТАВЉАЊЕ ПОЛИНОМА НА ФАКТОРЕ (ЧИНИОЦЕ)

x_1 корен од $P_n(x)$ $\Rightarrow$ $x - x_1 \mid P_n(x)$

$$\Rightarrow P_n(x) = (x - x_1)\cdot P_{n-1}(x)$$

x_2 корен од $P_{n-1}(x)$ $\Rightarrow$ $x - x_2 \mid P_{n-1}(x)$

$$\Rightarrow P_n(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot P_{n-2}(x)$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,a_n$$

нули могу бити ф-ке

Příklad x^2+2x+1

-1 je kořen $\Rightarrow$ $x+1 \mid x^2+2x+1$

$(x^2+2x+1) : (x+1) = x+1$

$x^2+2x+1 = (x+1)(x+1)$

-1 je kořen ředa 2