Matematika.tmf.bg.ac.rs

azekovic@tmf.bg.ac.rs

$60 + 40 \overset{+10}{\lfloor} \geq 100$

„Elementi više matematike" Nada i Miloš Milićić

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

ДЕФ: Скуп свих ... (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, у коме су уведене операције:

$+: (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$\cdot: (a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

назива се скуп КОМПЛ. БРОЈЕВА или КОМПЛЕКСНО ПОЉЕ.

пример: (a ← реални број)

$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$

$(a,0) \cdot (b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) = (ab, 0)$

Шта је са i? $(0,1)$ да ли важи $i^2 = -1$?

$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0)$

$i \cdot i$ $\qquad\qquad$ -1

АЛГЕБАРСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

$a+b\cdot i$, где је i такво да $i^2 = -1$

(a,b) (c,d) $(a+c, b+d)$

$+:\ (a+bi)+(c+di) = a+c+bi+di = (a+c)+(b+d)\cdot i$

$\cdot:\ (a+b\cdot i)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = \quad i^2=-1$

$= (ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$

уредјен пар? $(ac-bd, ad+bc)$

$:\ \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{a+b\cdot i}{c+di}\cdot\dfrac{c-di}{c-di} = \dfrac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi-d^2i^2} = \quad -bdi^2 = +bd,\ -d^2i^2 = +d^2$

$= \dfrac{ac+bd+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2} =$

$= \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$

$\dfrac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}, \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

$\dfrac{2+6i}{2} = 1+3i$

пример $\dfrac{1-i}{2+3i} = \dfrac{1-i}{2+3i}\cdot\dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{2-3i-2i+3i^2}{2^2+3^2} = \dfrac{-1-5i}{13} = \quad i^2=-1$

$= -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}\cdot i$

Ако је $z = a+bi$ тада је

$\overline{z} = a-b\cdot i$ конјугован број броју z.

$a = Re(z)$ ← реалан део од z

$b = Im(z)$ ← имагинарни део

Једнакост?

$z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2)$

ОСОБИНЕ:

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$, $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

доказ: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i)}$

$= \overline{a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 \cdot i}$

$= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i}$?

$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \cdot i$

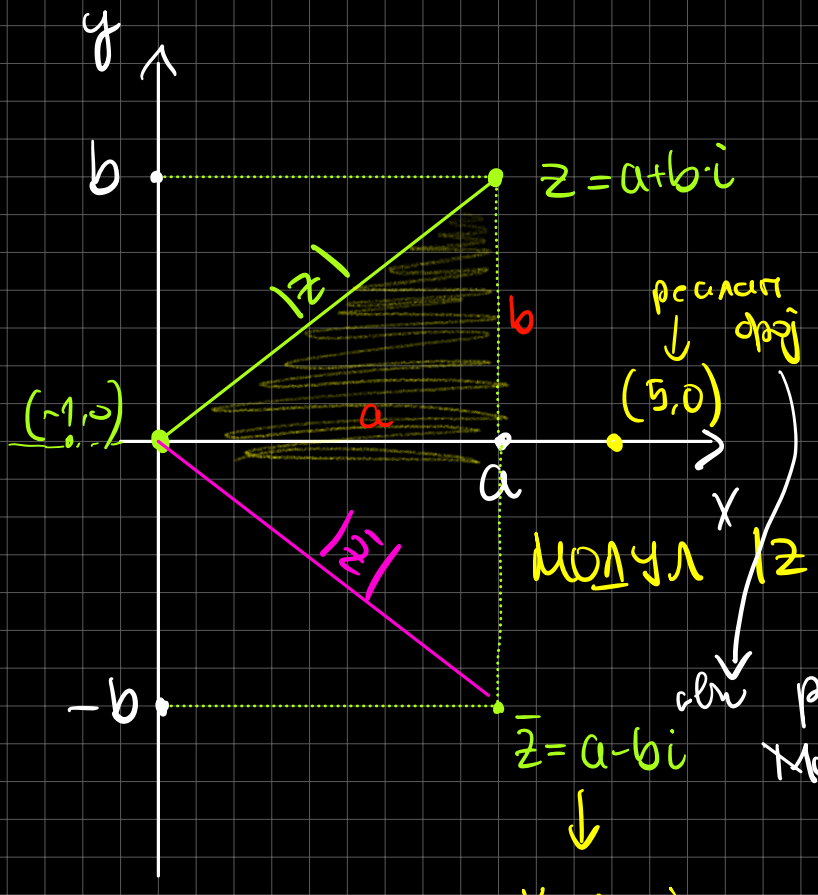
$= \underbrace{(a_1 - b_1 \cdot i)} + \underbrace{(a_2 - b_2 \cdot i)}$

$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ доказ за домаћи

3° $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА



Ком. бр. z се може предст. тачком у коорд. систему, где је реалан део пр. на x-оси, а им. на y-оси

МОДУЛ $|z|$ → $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

комп. броја је растојање...

сви реални ће бити на x-оси

Модул постаје апсол. вредност

Конј. је сим. у односу на x-осу

ОСОБИНЕ МОДУЛА:

1° $|z| = |\bar{z}|$ доказ: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

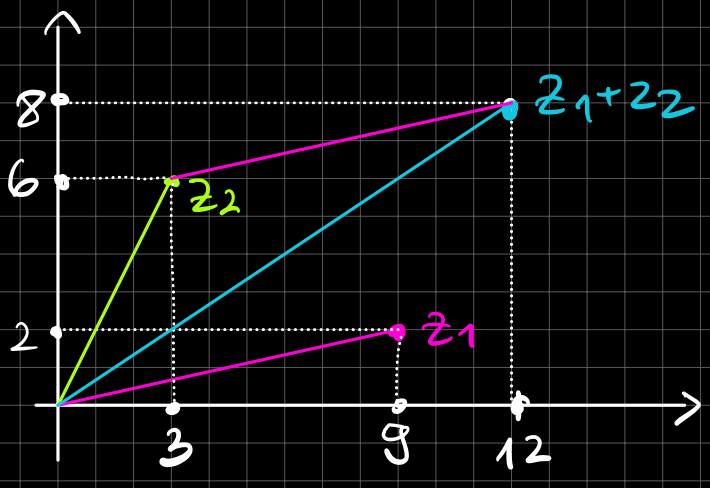
$|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ ↩ једнако је !

2° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

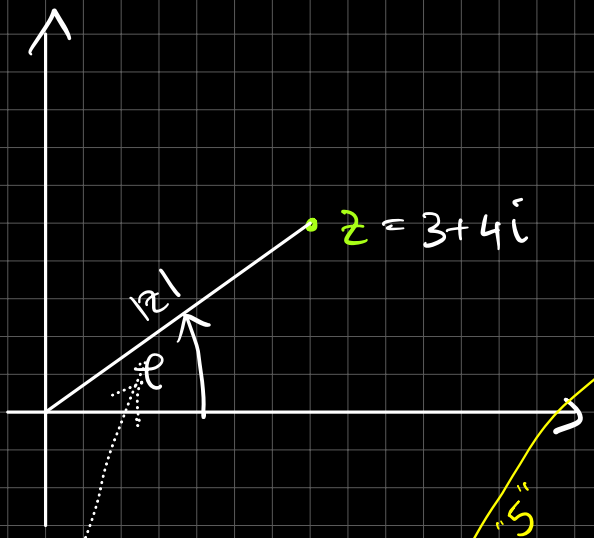
3° $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

4° $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ – НЕЈЕДНАКОСТ ТРОУГЛА

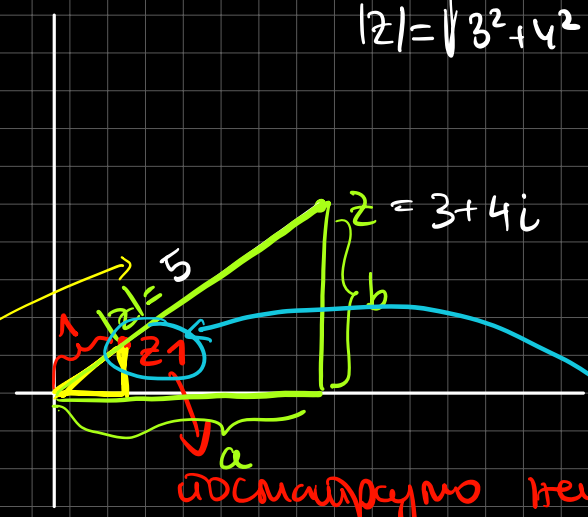
5° $z \cdot \bar{z} = |z|^2$



ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА



$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$



посматрајмо неки нови к.б. z1, који је ближи нули, и његов модул је |z1|=1

ова "5"

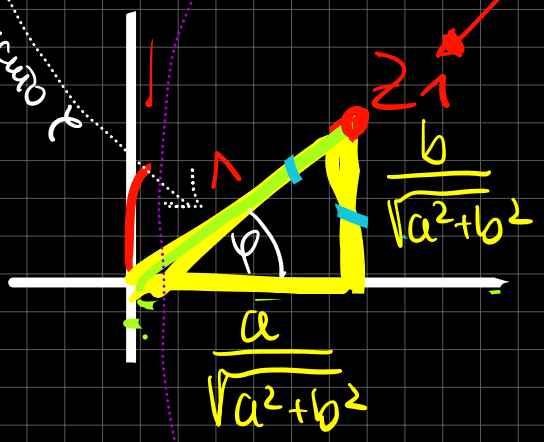
Крећемо од алг. облика $z = a + b\cdot i$

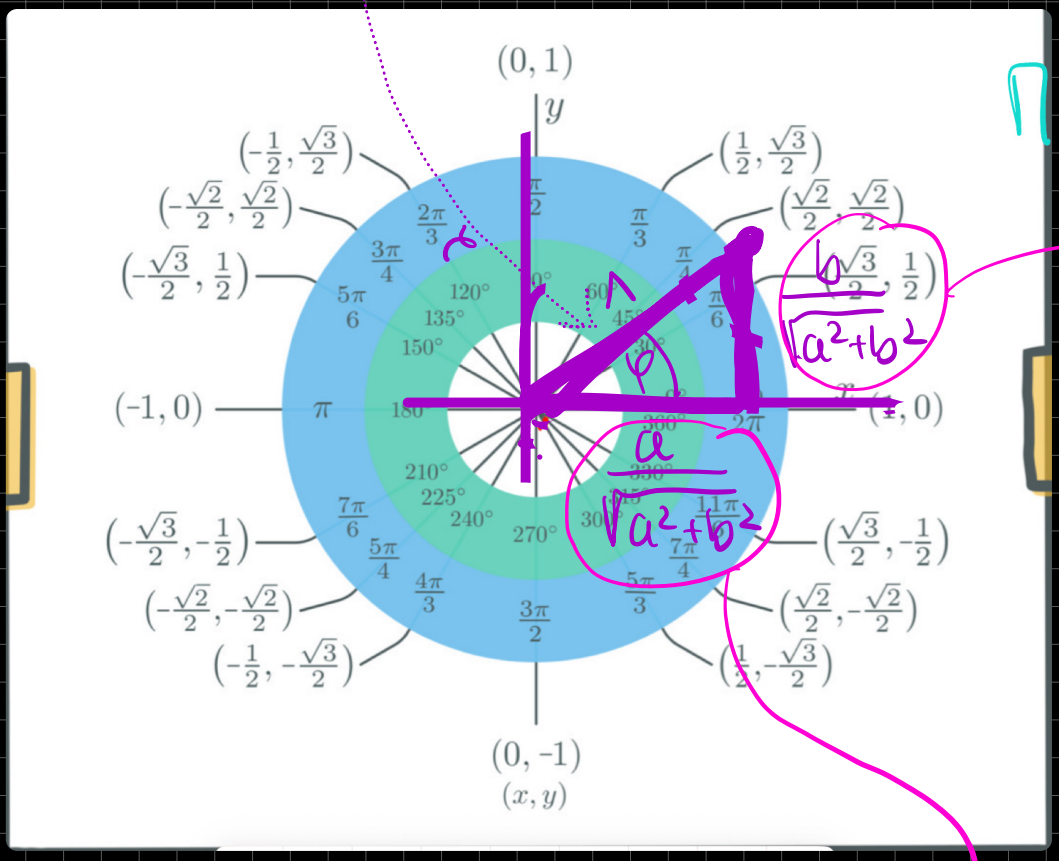
$$z = a+b\cdot i = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{|z|}\cdot\frac{a+b\cdot i}{\sqrt{a^2+b^2}} = |z|\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)$$

дакле $z = |z|\cdot(\text{неки комплексн. број})$

баш z1

исто φ





по сторі

$\exists_1\ \varphi \in [0, 2\pi)$ такво да $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Зашто нам то треба?

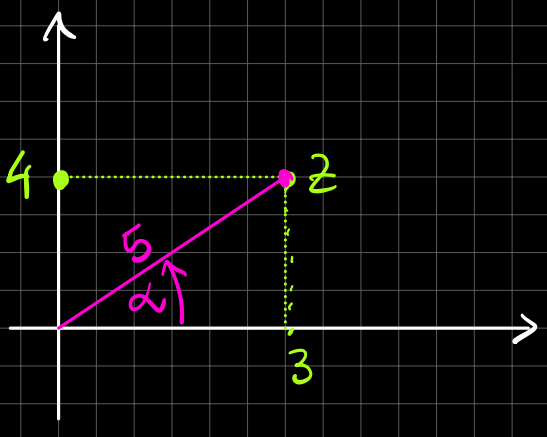
да би записали овако

$$z = a + b\cdot i = |z|\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right) = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

слично

$\exists_1\ \alpha \in (-\pi, \pi]$: $z = |z|\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$

ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ЗАПИС КОМПЛ БРОЈА.



$z = 3 + 4i$ ← алгебарски

$z = 5\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$

пример $z = 1+i$. Найти триг. запис к.б.

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\varphi} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\varphi}\cdot i\right)$$

Треба нам φ : $\cos\varphi$ $\sin\varphi$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Кондуйовани? Нуже $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Веть нехамо ўгао

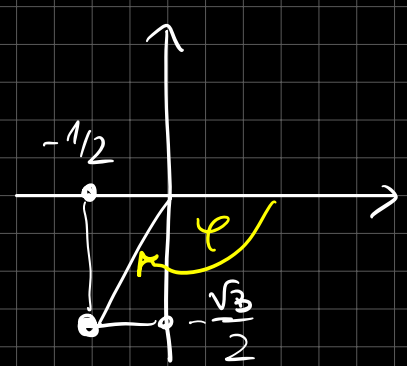
$$\bar{z} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

пример. $z = -1-\sqrt{3}\cdot i$. Найти триг. запис к.бр.

$$z = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$z = 2\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 2\left(\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\varphi} \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i}_{\sin\varphi}\right)$$

Найти φ такво да



$$\varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = 2\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

МНОЖЕННЯ КОМПЛ. ЧИСЕЛ ДАНИХ У ТРИГОНОМ. ОБЛИКУ

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$$

r_1, r_2 — модулі

$$z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cdot(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2))$$
$$\downarrow$$
$$= r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\boxed{z_1\cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))}$$