Matematika.tmf.bg.ac.rs

ANA ZEKIĆ

azekovic@TMF.BG.AC.RS

$60 + 40 \overset{+10}{\checkmark} \geq 100$

KOLOKVIJUMI — ZAVRŠNI

KOMPLEKSNI BROJEVI

DEF: ... (a,b), gde su $a,b \in \mathbb{R}$ u kome ...:

$+$: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$\cdot$: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

... SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA ili KOMPLEKSNO POLJE.

primer. (realni ord)

$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$

$(a,0) \cdot (b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) = (ab, 0)$

$a \cdot b = a \cdot b$

Gde je i? $(0,1)$ da mu kaže $i^2 = -1$

$i \cdot i = -1$

$(0,1)\cdot(0,1) \overset{?}{=} (-1,0)$ ✓

$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0)$

ALGEBARSKI OBLIK KOMPL. BROJA

$a + b\cdot i$, gde je i takvo da $i^2 = -1$

$(2,3)$ je isto što i $2+3\cdot i$, samo je

У питању други запис!

$(a,b) \Leftrightarrow a+bi$

Како се ту користе опер.?

$(a,b) \quad (c,d) \qquad\qquad (a+c, b+d)$

+: $(a+bi) + (c+di) = a+c+bi+di = (a+c)+(b+d)\cdot i$

$(a,b) \cdot (c,d)$

•: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = \quad (-bd)$

$= (ac-bd) + (ad+bc)\cdot i$

$(ac-bd,\ ad+bc)$

:: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi-d^2i^2} \quad (+bd)$

$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}$

хоћемо да доле остане реалан број

$\frac{4+12\cdot i}{2} = 2+6i$

$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$

$(a,b):(c,d) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

Пример $\frac{1-i}{2+3i} = \frac{1-i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i-2i+3i^2}{2^2+3^2} \quad (-3) = \frac{-1-5i}{13} =$

$= -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\cdot i$

КОНЈУГОВАН БРОЈ БРОЈУ $z = a+bi$ је број $\overline{z} = a-bi$

Означавамо га са $\overline{z}$.

Ако је $z = a+bi$:

$Re(z) = a$ ← РЕАЛАН ДЕО ОД z

$Im(z) = b$ ← ИМАГИНАРАН ДЕО ОД z

· 2 комплексна броја су једнака само су им једнаки реални делови, и само су им једнаки имагинарни.

ОСОБИНЕ:

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \quad z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

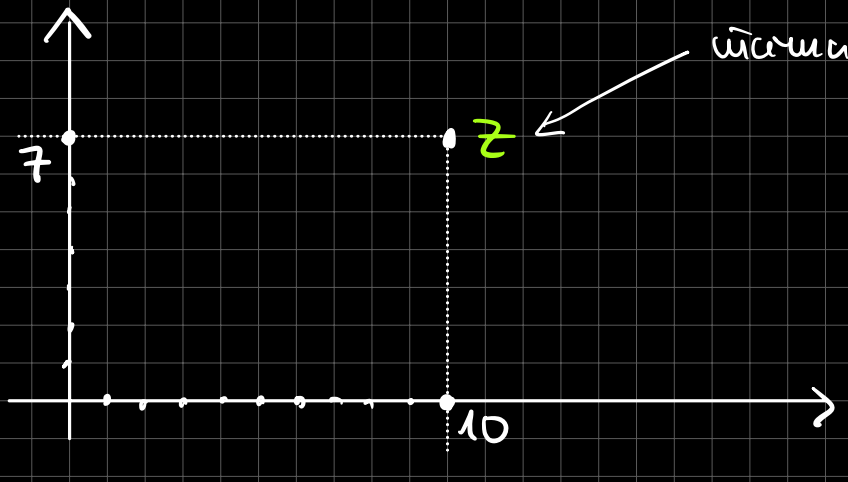
↘ доказ:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)}$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$
$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \cdot i$$
$$= a_1 + a_2 - b_1 \cdot i - b_2 \cdot i$$
$$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i)$$
$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

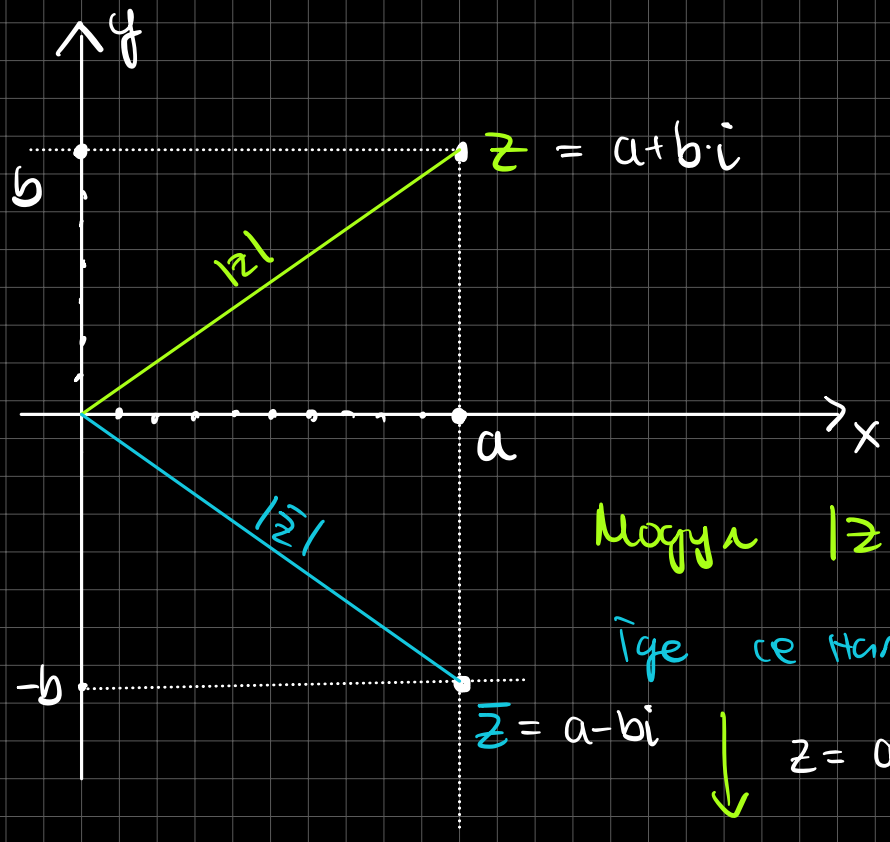
3° $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$

ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА



сваки z представља комп. број чији реални део се очитава на X-оси, а имагинарни на y-оси

$\Rightarrow z = 10 + 7 \cdot i$



$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Модул $|z|$ к.о. је раст. ш...

Где се налази $\bar{z}$? На графику?

$z = a-b\cdot i$ ↓

симетрично у односу на X-осу

ОСОБИНЕ:

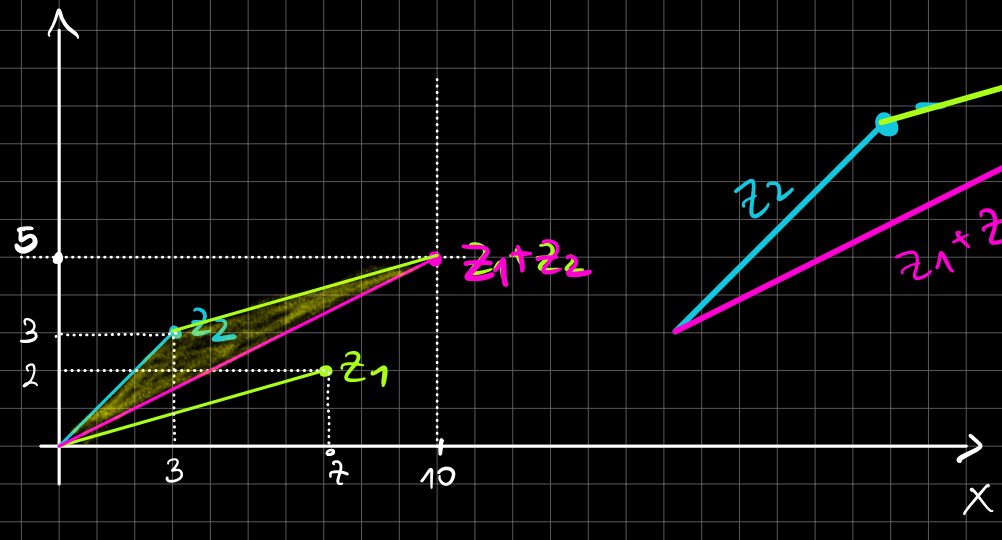
1° $|z| = |\bar{z}|$

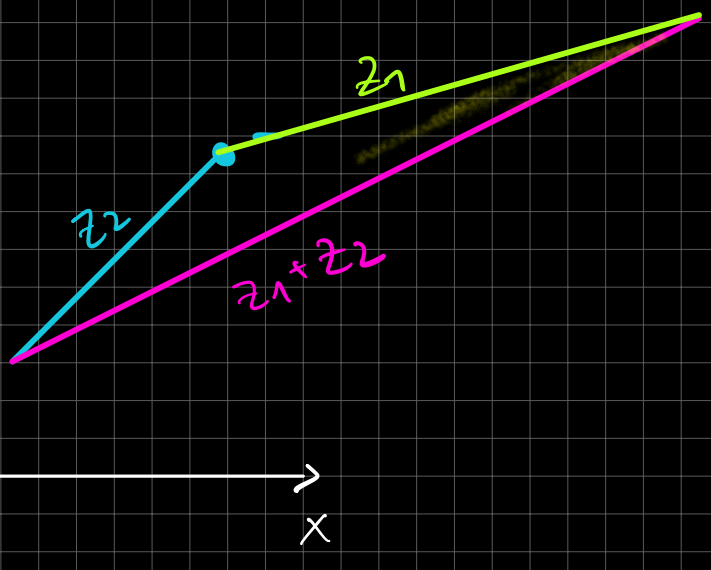
2° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3° $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$

4° $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ НЕЈЕДНАКОСТ ТРОУГЛА

5° $z \cdot \bar{z} = |z|^2$



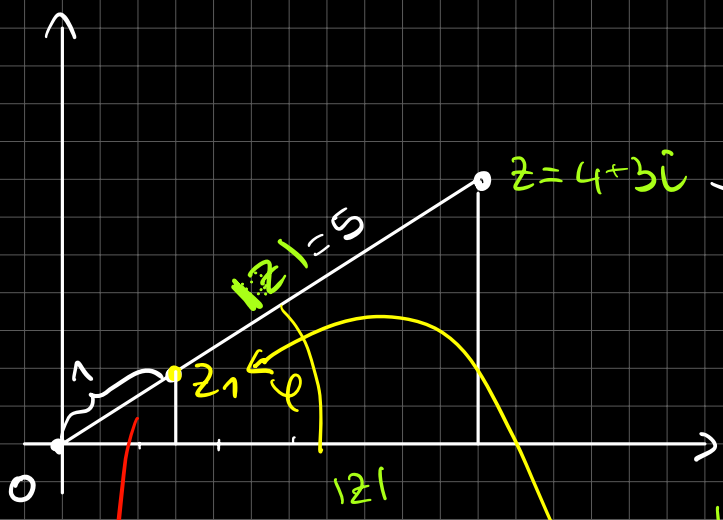


ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

кретање од облика $a+bi$

пример : $4+3i$

$|z| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

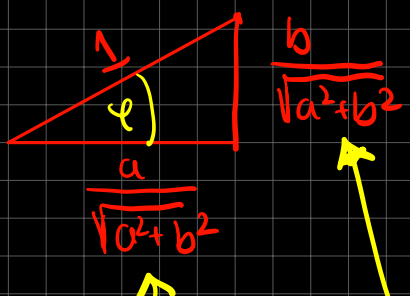


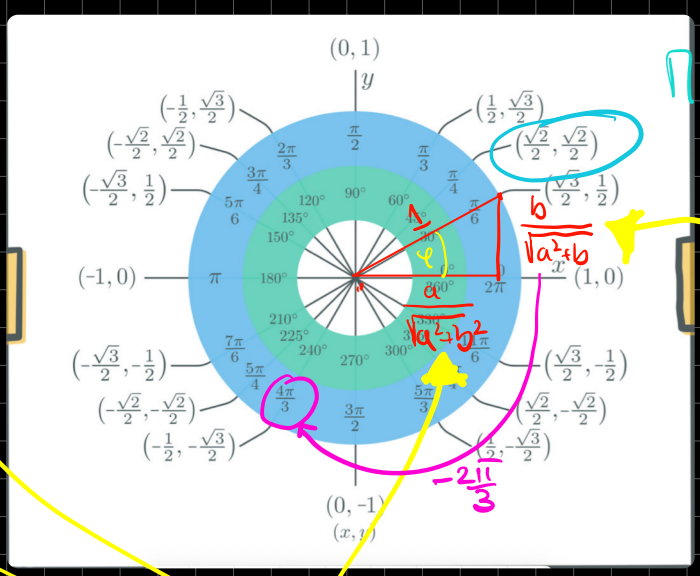
желимо да тачка буде на удаљености 1 од коорд. почетка

$$z = a+bi = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}} = \underbrace{|z|}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)$$

неки комплексан број

овај?





$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

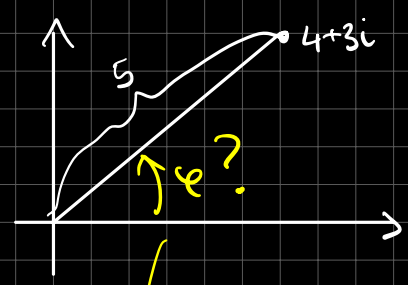
$\exists_1\ \varphi \in (0, 2\pi]$ такво да $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

постоји

Слично:

$\exists_1\ \varphi \in (-\pi, \pi]$ такво да $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

више волимо због конј. бројева



До чега смо ситили?

За дати к.б. $z = a+bi$:

$$\exists_1\ \varphi \in (-\pi, \pi]: \quad z = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

пример: Нека је $z = 1+i$. Наћи тригонометријски запис од z.

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$z = 1+i = \sqrt{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right)$$

треба нам неки угао α

$\cos\alpha$ $\sin\alpha$

ово важи за $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Нему конјуговани не пишемо $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

јер триг. запис овде очекује $+$.

Него мењамо угао у негативни $\Rightarrow -\frac{\pi}{4}$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Пример 2: Ако је $z = -1-\sqrt{3}i$, нађи тригонометријски запис од z.

$$z = -1 + (-\sqrt{3})\cdot i$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

обрати пажњу на минус?

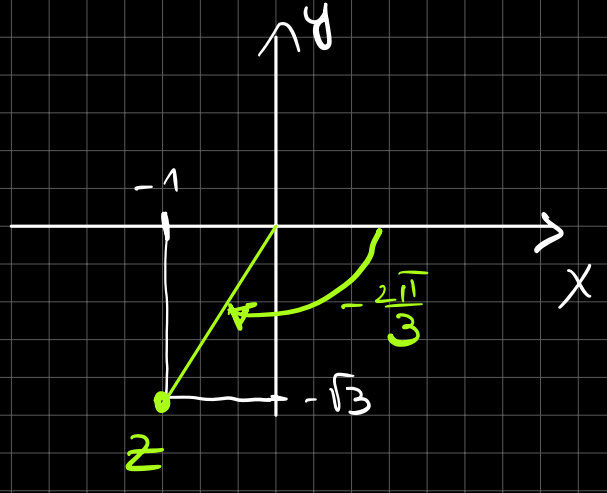
$$-1-\sqrt{3}\cdot i = 2\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$$

треба нам φ таквода је $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$

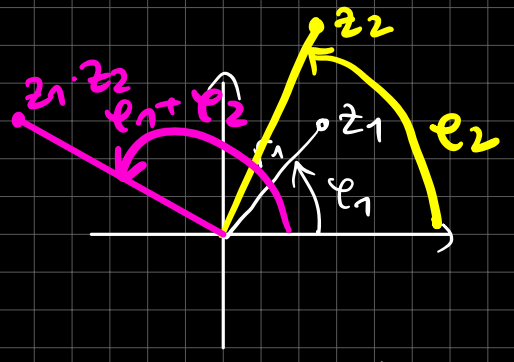
$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$



МНОЖЕЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА ДАТИХ У ТРИГОНОМЕТАРСКОМ ОБЛИКУ

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$



$$z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\cdot i + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\cdot i - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + (\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\cdot i)$$

$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \to \cos(\varphi_1+\varphi_2)$

$\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \to \sin(\varphi_1+\varphi_2)$

$$\Rightarrow \boxed{z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))}$$

↑ овај облик записа комплексног броја

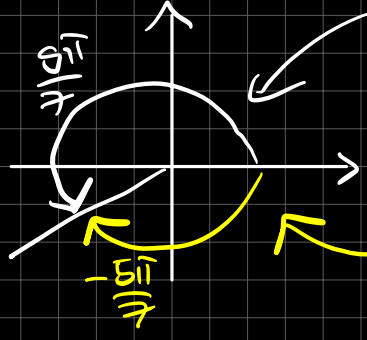
пример: $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{7}\right)$

$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\right)$

$$z_1\cdot z_2 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{9\pi}{7} + i\sin\frac{9\pi}{7}\right)$$

↙ Где је?



Пресек је $(-\pi,\pi]$

угао је $-\frac{5\pi}{7}$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right)$$