

1. Neka su dati sledeći skupovi:

$$\begin{array}{llll} A & A \setminus C & (A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C) & (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ (A \setminus B) \cup B & A \cup B & (A \cup B) \setminus C & (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{array}$$

a) ☐ 6 Predstaviti ih Venovim dijagramima.

b) ☐ 4 Odrediti koji od njih su međusobno jednaki?

c) ☐ 4 Koje od navedenih unija su disjunktne? Izraziti njihove verovatnoće primenom treće aksiome verovatnoće.

2. Na stolu se nalaze dve jednake kutije sa po 30 kupona. U prvoj se nalazi 20 kupona koji vrede 1000 dinara i 10 kupona koji vrede 2000 dinara. U drugoj kutiji se nalazi podjednak broj kupona koji vrede 1000 dinara i 2000 dinara. Mirko na slučajan način bira jednu kutiju i iz nje, bez vraćanja, izvlači 4 kupona koji predstavljaju njegov dobitak.

a) ☐ 4 Odrediti verovatnoću da će Mirko osvojiti tačno 7000 dinara.

b) ☐ 4 Ako se zna da je Mirko osvojio tačno 7000 dinara, kolika je verovatnoća da je odabrao prvu kutiju?

c) ☐ 6 Ako se zna da je Mirko odabrao prvu kutiju, kolika je verovatnoća da je osvojio najmanje 6000 dinara?

3. Kutija iz ovog zadatka sadrži 8 loptica, od kojih su 3 zelene, ostale su plave. Tanja na slučajan način izvlači 4 kuglice. Neka X predstavlja broj izvučenih zelenih kuglica.

a) ☐ 4 Naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X , ako se loptice izvlače bez vraćanja u kutiju.

b) ☐ 5 Naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X , ako se loptice izvlače sa vraćanjem u kutiju.

c) ☐ 4 Koji je naziv raspodele slučajne veličine opisane pod b)? Odrediti njeno matematičko očekivanje $E(X)$.

4. Neka slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ako je $P(X = i) = c(5 - i)$:

a) ☐ 4 Odrediti konstantu c tako da X bude slučajna promenljiva.

b) ☐ 5 Odrediti funkciju raspodele $F_X(x)$ i predstaviti je grafikom.

Rešenja
studentata:

1. 1) A ✓
2) $A \setminus C$ ✓
3) $(A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C)$ ✓
4) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ✓
5) $(A \setminus B) \cup B$ ✓
6) $A \cup B$ ✓
7) $(A \cup B) \setminus C$ ✓
8) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ✓

2) Koji su jednaki?
 $A \setminus C = (A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C)$ ✓
 $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ ✓
 $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ ✓
 $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ✓

c) Disjunktne unije = ?
 $P((A \setminus (B \cup C)) \cup ((A \cap B) \setminus C)) = P(A \setminus (B \cup C)) + P((A \cap B) \setminus C)$ ✓
 $P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ ✓
 $P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$ ✓

14

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{I} & \text{II} \\ \hline 20 & 10 \\ \hline 1000 & 2000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 15 & 15 \\ \hline 1000 & 2000 \\ \hline \end{array}$$

I kutija

$\frac{1}{2} \rightarrow \pi$ kutija

$$P(\text{IIII}) = 4 \cdot 1000 = 4000$$

$$P(\text{IIII}) = 2000 + 3 \cdot 1000 = 5000$$

$$P(\text{IIII}) = 4000 + 2000 = 6000$$

$$P(\text{IIII}) = 3 \cdot 2000 + 1000 = 7000$$

$$P(\text{IIII}) = 4 \cdot 2000 = 8000$$

$$P(\text{IIII}) = P(A) = ?$$

$$P(H_1) = \frac{1}{2} \rightarrow P(A|H_1) = \frac{\binom{20}{1} \binom{10}{3}}{\binom{30}{4}}$$

$$P(H_2) = \frac{1}{2} \rightarrow P(A|H_2) = \frac{\binom{15}{2} \binom{15}{2}}{\binom{30}{4}}$$

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{20}{1} \binom{10}{3}}{\binom{30}{4}} = \frac{20 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 0,088$$

$$P(A|H_2) = \frac{\binom{15}{2} \binom{15}{2}}{\binom{30}{4}} = \frac{15 \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 0,12$$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)$$

$$= 0,088 \cdot \frac{1}{2} + 0,12 \cdot \frac{1}{2} = 0,104$$

$$(b) P(A) = 0,104$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,088 \cdot 0,5}{0,104}$$

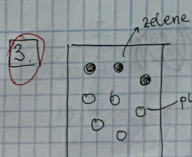
$$= 0,423$$

$$c) P(\text{IIII}) + P(\text{IIIIII}) + P(\text{IIIIIIII}) = P(B)$$

$$P(B|H_1) = ?$$

$$P(B|H_1) = \frac{\binom{20}{2} \binom{10}{2} + \binom{20}{1} \binom{10}{3} + \binom{20}{0} \binom{10}{4}}{\binom{30}{4}} = \frac{\frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} + 20 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 0,402$$

-- -- :5



Izvlače se 4

X - "broj izvučenih zelenih"

a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{14} & \frac{6}{14} & \frac{6}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$

Bez vraćanja

$P(X=0) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$

$P(X=1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{70}$

$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3 \cdot 10}{70} = \frac{3}{7}$

$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{5}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{1 \cdot 5}{70} = \frac{1}{14}$

$P(X=4) = \frac{\binom{3}{4} \binom{5}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{0}{70} = 0$

zelene: $\frac{3}{8}$
plave: $\frac{5}{8}$

b) Sa vraćanjem:

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\binom{4}{1} = 4$
 $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$
 $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4$
 $\binom{4}{4} = 1$

$P(X=0) = \left(\frac{5}{8}\right)^4 = 0,1526$

$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 = 0,3662$

$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 0,3296$

$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right) = 0,1318$

$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 = 0,01978$

c) Binomna raspodela $B \sim X(4, \frac{3}{8})$

$E(X) = n \cdot p = 1,5$

4) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$P(X=i) = c \cdot (5-i)$

a) $c = ?$

5) $F_X(x) = ?$ u praksi

$x=0 \Rightarrow P(X=0) = c \cdot (5-0) = 5c = 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$

$x=1 \Rightarrow P(X=1) = c \cdot (5-1) = 4c = 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$

$x=2 \Rightarrow P(X=2) = c \cdot (5-2) = 3c = 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$

$x=3 \Rightarrow P(X=3) = c \cdot (5-3) = 2c = 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$

$x=4 \Rightarrow P(X=4) = c \cdot (5-4) = 1c = c = \frac{1}{15}$

$5c + 4c + 3c + 2c + c = 1$

$15c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{15} = 0,067$

6) $F_X(x) = ?$

$x < 0 \Rightarrow \frac{0}{15}$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow \frac{1}{15}$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15}$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow \frac{5}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{12}{15}$

$3 \leq x < 4 \Rightarrow \frac{5}{15} + \frac{4}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15}$

$x \geq 4 \Rightarrow \frac{15}{15} = 1$

