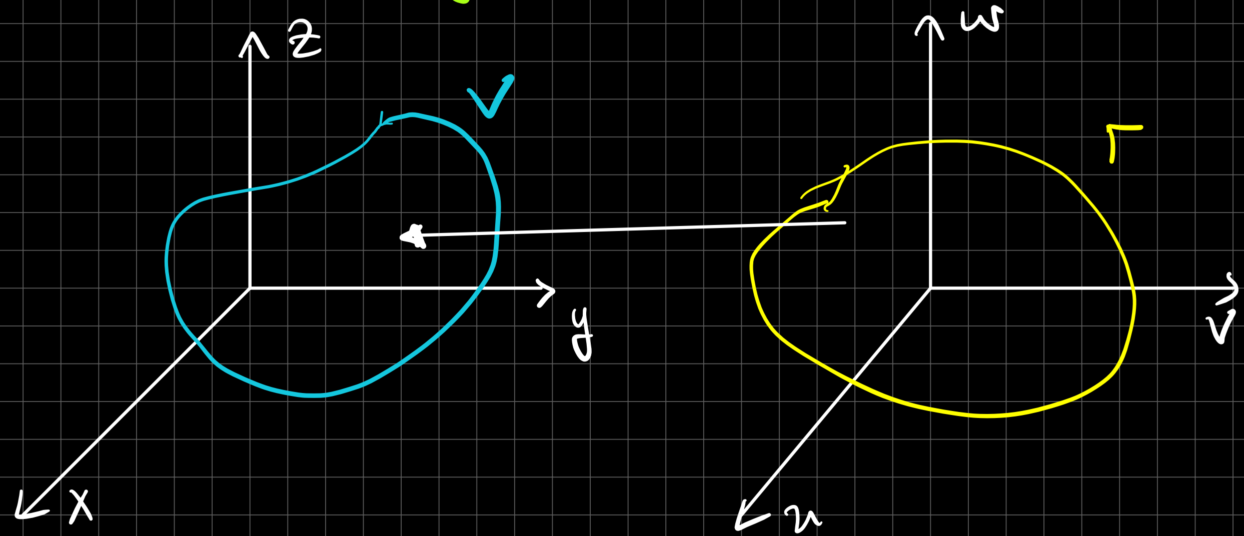
03.06.2026.

СМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ КОД ТРОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

Нека је V затворена област у простору и нека је на V деф. непр. ф-ја $f(x,y,z)$. Пп. да се промењ. x,y,z могу предст. као ф-је 3 променљиве:

$$x = x(u,v,w)$$
$$y = y(u,v,w)$$
$$z = z(u,v,w),$$

при чему су ове ф-је непрекидне заједно са својим парц. изводима првог реда, а које област Γ једнозначно пресликавају на V



Тада важи

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Gamma f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

Где је:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

ЈАКОБИЈАН

Најважније сл. трансформације координата код трој. интеграла су ЦИЛИНДРИЧНЕ и СФЕРНЕ коорд.

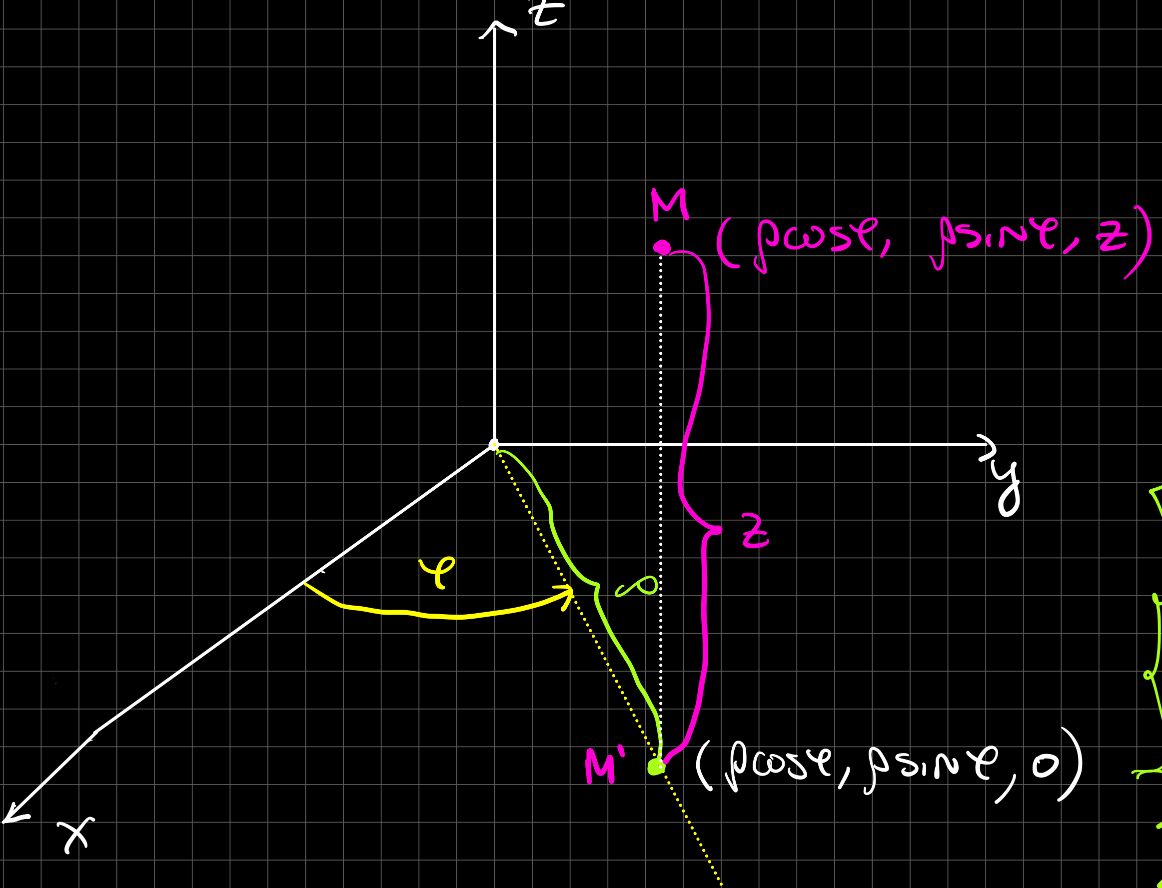
ЦИЛИНДРИЧНЕ КООРДИНАТЕ (ПОЛАРНЕ)

Задају се ф-лама:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\cdot\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho \geq 0 \\ &0 \leq \varphi < 2\pi \\ &z \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Област у простору (ρ, φ, z) дефинисана релацијама $(*)$ се формулама $(**)$ пресликава у цео простор $\mathbb{R}^3$



! Уводе се најчешће када у подинтеграл. изразу или у опису области интеграције постоји израз x^2+y^2 јер је $x^2+y^2=\rho^2$

Јакобијан?

$$J=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{matrix} =$$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\cdot\sin\varphi$
$z = z$

$$= \rho\cos^2\varphi - (-\rho\sin^2\varphi) = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$$

$$|J| = \rho$$

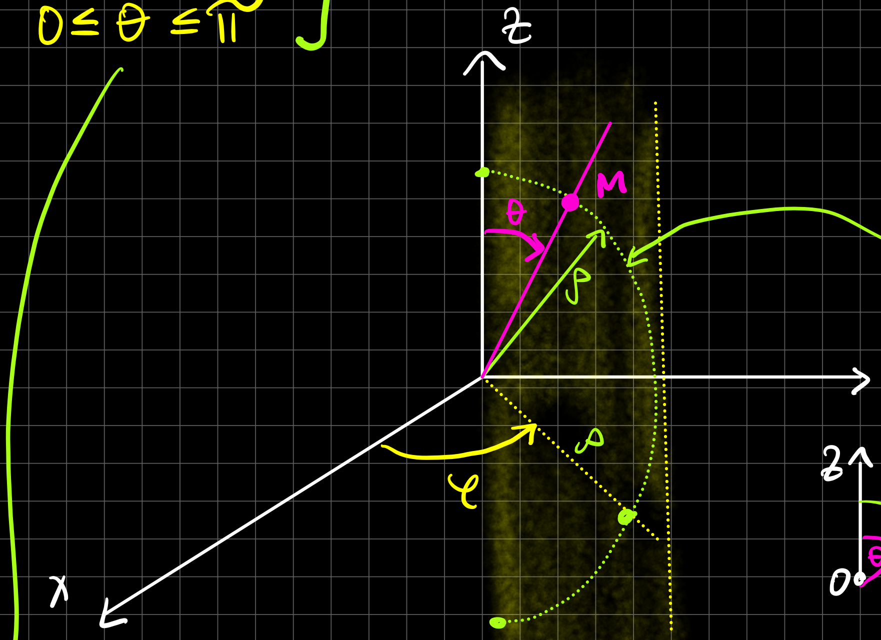
СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ

Задају се формулама:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}\right\}(**)$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho \geq 0 \\ &0 \leq \varphi < 2\pi \\ &0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}\right\}(*)$$

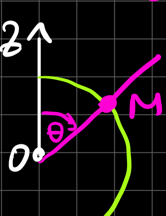
Област у простору (ρ, φ, θ) дефинисана релацијама $(*)$ се формулама $(**)$ пресликава на цео простор $\mathbb{R}^3$



φ – угао са позитивним делом осе Ox, одреди полураван

ρ - одреди "полукружницу"

θ - угао са позитивним делом осе Oz



Уводе се најчешће када се у подинт. изразу или у опису области интеграције јавља израз $x^2+y^2+z^2$ јер је $=\rho^2$

Јакобијан?

$$J=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots = \rho^2\sin\theta$$

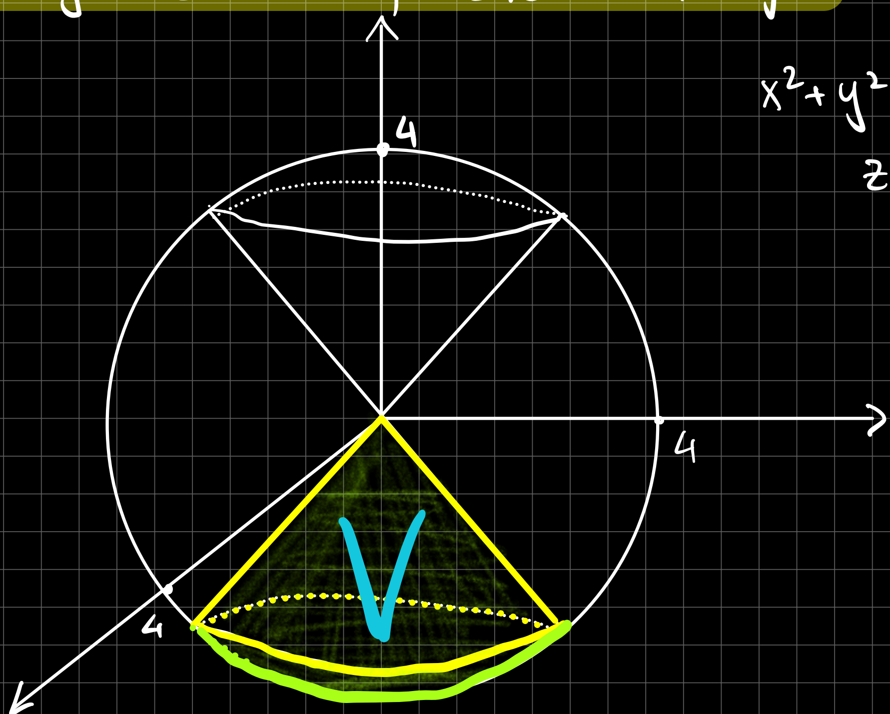
$x=\rho\sin\theta\cos\varphi$

$y=\rho\sin\theta\sin\varphi$

$z=\rho\cos\theta$

$$J=\rho^2\sin\theta$$

Пример: Израчунати V тела одређеног релацијама $x^2+y^2+z^2\le 16$, $z\sqrt{3}\le -\sqrt{x^2+y^2}$



$x^2+y^2+z^2\le 16 \Leftarrow$ сфера са $r=4$

$z\sqrt{3} = -\sqrt{x^2+y^2} \quad /^2$

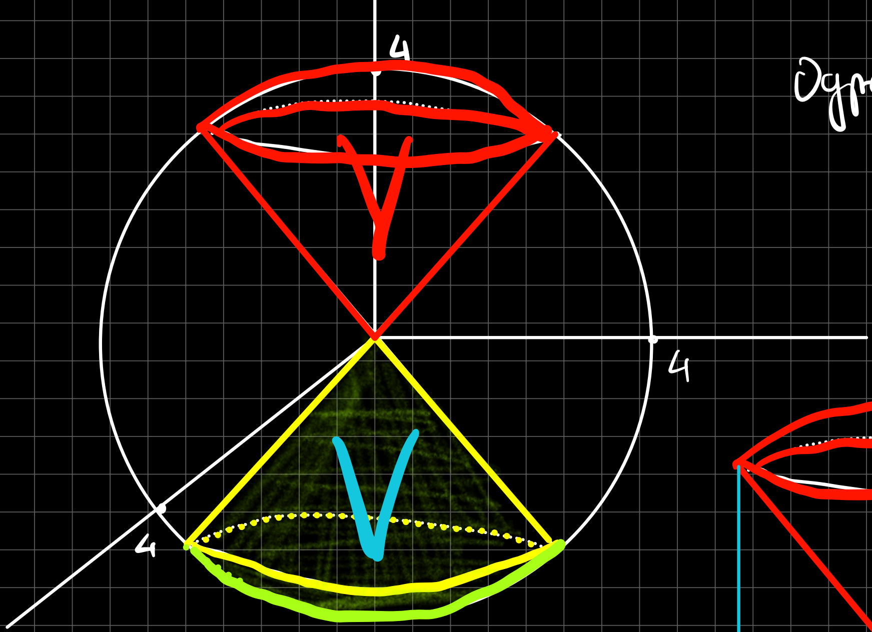
$z^2=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3} \Leftarrow$ конус

шта каже минус?

$\downarrow$

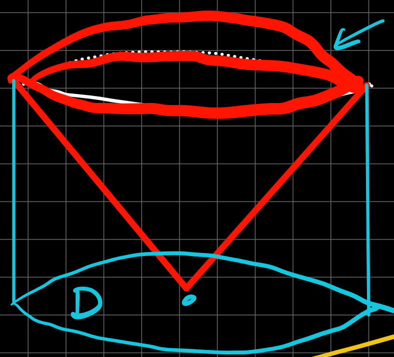
доњи део конуса

I НАЧИН – ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛ



Одређујемо V уместо V јер су једнаки?

⇒ Морамо да га поделимо на 2 фигуре:



$z=\sqrt{16-x^2-y^2}$

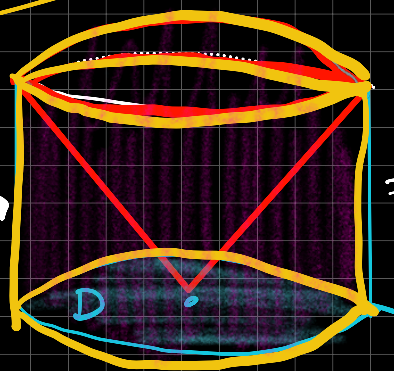
$$\iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

↓

Коју V мери?

$V=$

Мери V целе фигуре



$=V_1$

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$

Шта је вишак?

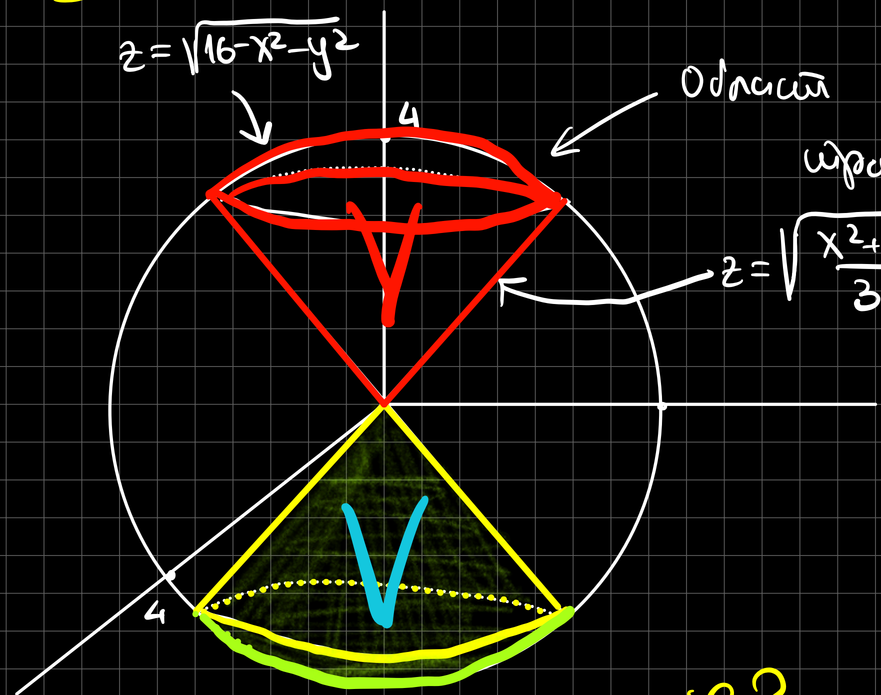
Како да га одузмемо?

$$\iint_D \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = V_2$$

$$\Rightarrow \quad V = V_1 - V_2 = \iint_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy - \iint_D \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\sqrt{16-x^2-y^2} - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\right) dx\,dy = \ldots$$

II начин: ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ – СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ



Област V за коју ћемо тражити $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$

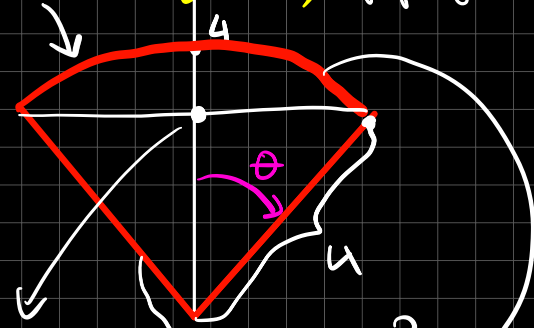
Смена:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \rho \cos\theta$$

φ ?

θ ?

$\varphi \in [0, 2\pi)$ јер је тело око z-осе



Која је координата?

Пошто је $x=0$:

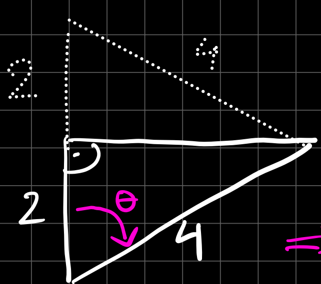
$$\left.\begin{aligned} z&=\sqrt{16-y^2} \\ z&=\sqrt{\frac{y^2}{3}} \end{aligned}\right\} \text{систем}$$

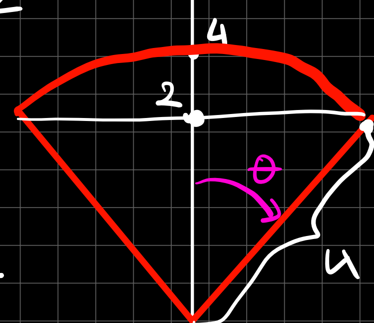
$$\to \begin{cases} y^2+z^2=16 \\ 3z^2=y^2 \end{cases}$$

$3z^2$

$4z^2=16$

$z^2=4 \quad z=\pm 2$





$\Rightarrow \theta = 60^\circ = \pi/3$

$\Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

ρ ? $\quad \rho \in [0,4]$

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{4} \overbrace{\rho^2 \sin\theta}^{|J|} \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\theta \cdot \sin\theta \, \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^4 =$$

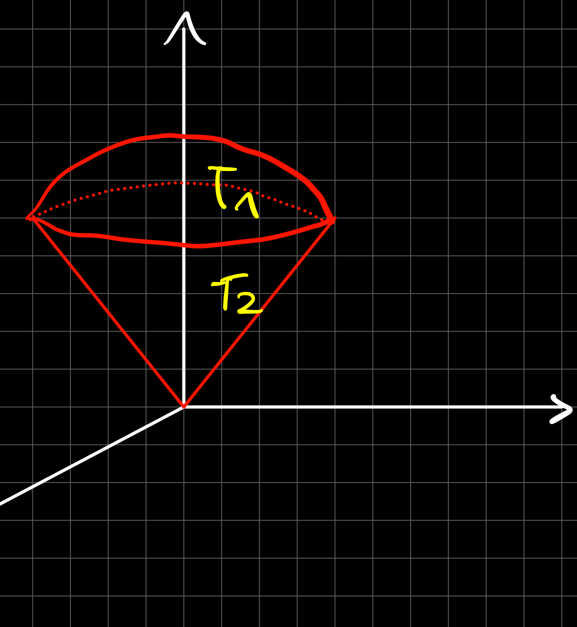
$$\ldots = \frac{64\pi}{3}$$

III начин: ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ - ЦИЛИНДРИЧНЕ КООРДИНАТЕ

смена:

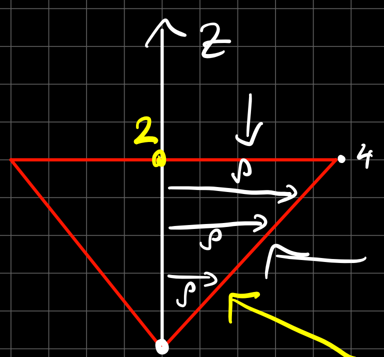
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho \cdot \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}}$$

(φ, ρ, z)



φ ? $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$ за оба тела

T_1 :



нема ф-ја..

$\rho \in [0, \cancel{\ldots}\,]$

$$z^2 = \frac{x^2+y^2}{3} = \frac{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}{3} = \frac{\rho^2}{3}$$

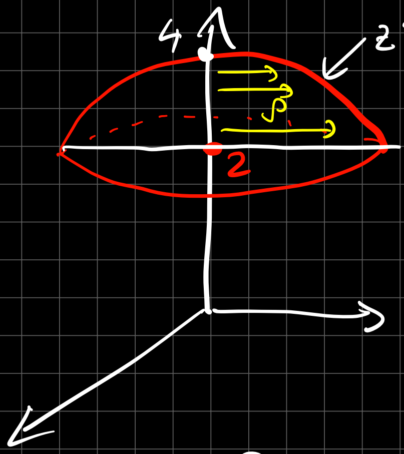
$\rho^2 = 3z^2, \quad \rho = z\sqrt{3}$

$\Rightarrow \rho \in [0, z\sqrt{3}]$

z ? $\quad z \in [0,2]$

$$T_1 = \{ (\varphi, z, \rho) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le 2, 0 \le \rho \le z\sqrt{3} \}$$

T2:



$z^2 = 16-(x^2+y^2)$
$\quad = 16-\rho^2 \longrightarrow \rho^2 = 16-z^2, \quad \rho \in [0, \sqrt{16-z^2}]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$z \in [2, 4]$

$\rho\ ?$

$$T_2 = \{(\varphi, z, \rho) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 2 \le z \le 4,\ 0 \le \rho \le \sqrt{16-z^2}\}$$

$$V = V(T_1) + V(T_2) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} dz \int_0^{z\sqrt{3}} \underbrace{\rho}_{|J|} \cdot d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^{4} dz \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \rho \cdot d\rho = \ldots = \frac{64\pi}{3}$$

ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ

ДЕФ: Површ α је глатка ако у свакој тачки те површи постоји јединствена тангентна раван и ако положај те равни НЕПРЕКИДНО зависи од одговарајућих тачака

Мала промена положаја тачака, изазива мале промене положаја равни.

- Нека је S ГЛАТКА ПОВРШ
- Нека је на њој деф. НЕПРЕКИДНА ф-ја $f(x,y,z)$
- Глатку површ S ћемо поделити на n елементарних подповрши S_i, чије се повр. лако рачунају и

Означавамо их са $\Delta\sigma_i$, тј. $P(S_i) = \Delta\sigma_i$

- означимо са $d_1, d_2, \dots, d_n$ дијаметре подповрши $S_1, \dots, S_n$
- у сваком делу $S_1, \dots, S_n$ изаберимо тачку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$
- Нека је вр. фје у тим тачкама $f(x_i, y_i, z_i)$
- Формирамо интегралну суму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

ИНТЕГРАЛНА СУМА ПРВОГ РЕДА фје $f(x, y, z)$

ДЕФ: Уколико постоји кон. гр. вредност интегр. сума σ_n када макс. од дијаметара $d \to 0$, која не зависи од поделе површи S нити од избора тачака M_i, онда се та гр. вредност зове ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ фје $f(x, y, z)$ по површи S и означавамо га са:

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma$$

ТЕОРЕМА: Уколико је фја $f(x, y, z)$ НЕПРЕКИДНА на површи S, онда је и ИНТЕГРАБИЛНА на свој површи.