10.06.2026.

ОСОБИНЕ:

Деф. површ. инт. прве врсте је аналогна деф. крив. инт. прве врсте, па су им и особине аналогне.

$\Rightarrow$ ТРЕБА ЗНАТИ ДА СЕ ИСПИШУ

ИЗРАЧУНАВАЊЕ $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma$

Нека је површ S задата на области D равни Oxy ф-јом $z=z(x,y)$, при чему је z непр. заједно са својим парц. изводима z'_x, z'_y. Тада:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$$

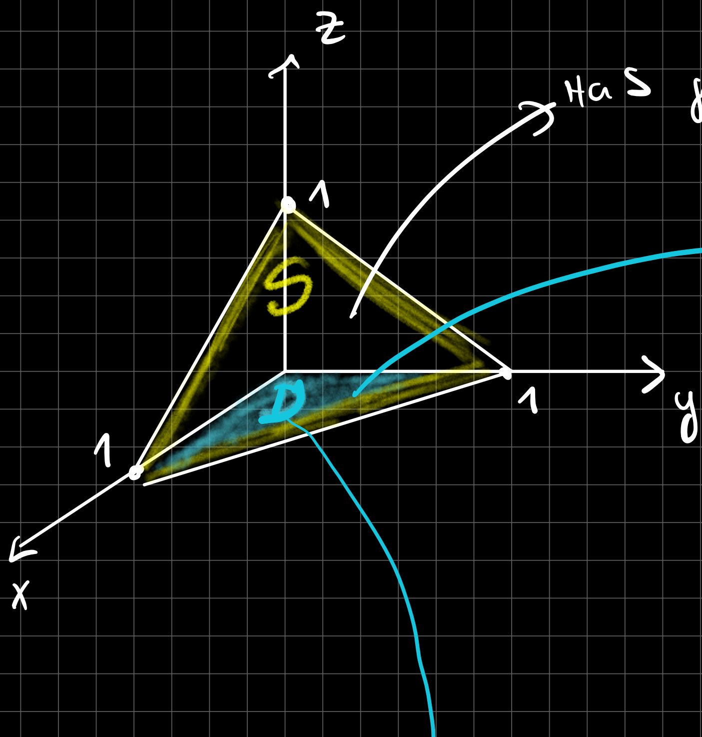
S → површ у простору

површински

D → њена пројекција на раван Oxy

двојни интеграл

пример Израчунати $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3}$ где је S део равни $x+y+z=1$ у првом октанту.



На S је деф. ф-ја $f(x,y,z)=\frac{1}{(1+x+z)^3}$

На D имамо ф-ју 2 променљиве која дефинише површ S:

$x+y+z=1$

$\Rightarrow \quad z = z(x,y) = 1-x-y$

$\Downarrow$

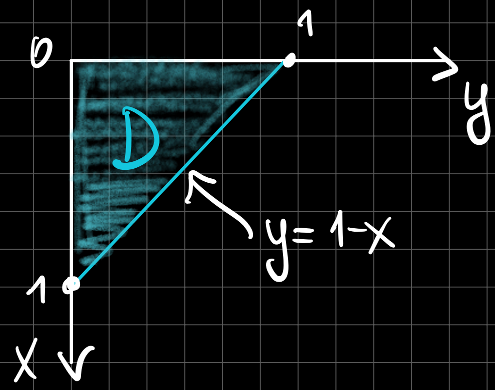
$z'_x=-1, \quad z'_y=-1$

$$\Rightarrow \iint_S \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3} = \iint_D \frac{1}{(1+\cancel{x}+\underbrace{1-\cancel{x}-y}_{})^3}\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dx\,dy =$$

$z(x,y)=1-x-y$

$$= \iint_D \frac{1}{(2-y)^3}\sqrt{3}\,dx\,dy = \sqrt{3}\iint_D \frac{1}{(2-y)^3}\,dx\,dy = I$$

D?



$x \in [0,1]$

$y \in [0, 1-x]$

$$I = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^3} = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Нека је S деф. парамет. јнама

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$

$z = z(u,v)$, при чему су x, y, z непр. заједно са својим парц. изводима, при чему $(u,v) \in D$, где је D затворена област у Oxy. Тада важи формула:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{A\cdot B - C^2}\,du\,dv,$$

где су:

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$B = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

ПРИМЕНА

1. ОДРЕЂИВАЊЕ ПОВРШИНЕ ДЕЛА ПОВРШИ

$$P(S) = \iint_S d\sigma$$

2. ОДРЕЂИВАЊЕ МАСЕ ПОВРШИ S са густином ρ.

$$m(S) = \iint_S \rho(x,y,z)\,d\sigma$$

ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

ДЕФ: Површ S се назива ДВОСТРАНОМ ако за сваку затворену криву која припада површи S важи да произвољни вектор нормале (на површ) НЕ МЕЊА СМЕР при обиласку дате криве.

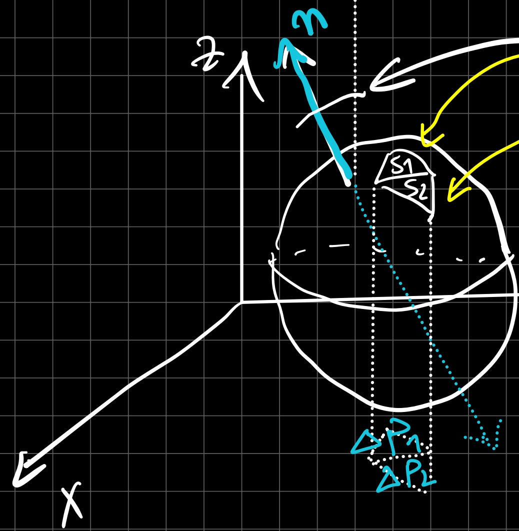
у истој тачки!

Која није?

Мебијусова трака!

ДЕФ: Површ S је ОРИЈЕНТИСАНА уколико је двострана и уколико је ИЗАБРАНА ЈЕДНА ЊЕНА СТРАНА одређена датим вектором.

- Нека је S глатка оријентисана површ
- Нека је на њој деф. непр. ф-ја $R(x,y,z)$
- Изаберимо ону страну S^+ површи S, за коју је угао између јединичног вектора нормале и осе Oz оштар!



Овај $\vec{n}$ формира оштар угао.

- Површ S ћемо поделити на n подповрши $S_1, S_2, \dots, S_n$
- Означимо са $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$ површине одговарајућих ПРОЈЕКЦИЈА на Oxy

(при чему је ΔP_i позитиван знак уколико је угао између нормале и z осе оштар, а негативан знак уколико је угао туп)

- Нека је у сваком делу $S_1, S_2, \dots, S_n$ одабрана тачка $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$
- Нека су $d_1, d_2, \dots, d_n$ одговарајући дијаметри за $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$, и нека је $d = \max d_i$
- Формирајмо инт. суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta P_i$$

ИНТЕГРАЛНА СУМА ДРУГОГ РЕДА

за ф-ју $R(x,y,z)$

ДЕФ: Уколико постоји кон. гр. вредност инт. сума када $d \to 0$, која не зависи од поделе површи S и избора тачака M_i, онда се та гр. вредност зове ПОВРШ. ИНТ. ДРУГЕ ВРСТЕ ф-је $R(x,y,z)$ по површи S и означавамо га:

$$\iint_{S^+} R(x,y,z)\,dx\,dy$$

- аналогно се дефинишу и:

$$\iint_{S^+} P(x,y,z)\,dy\,dz$$

$$\iint_{S^+} Q(x,y,z)\,dx\,dz$$

P	Q	R
x	y	z

где су $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ непр. фје.

Сума три поменута интеграла назива се:

ПОВРШИНСКИ ИНТ. ДРУГЕ ВРСТЕ:

$$\iint_{S^+} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy$$

ТЕОРЕМА: Ако је $R(x,y,z)$ непр. на површи S, тада је и интеграбилна на површи S, тј. за њу постоји површ. инт. друге врсте.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ

Нека је површ S задата на области D (која је у равни Oxy) фјом $z=z(x,y)$. Тада важи:

$$\iint_{S^+} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

пројекција на Oxy

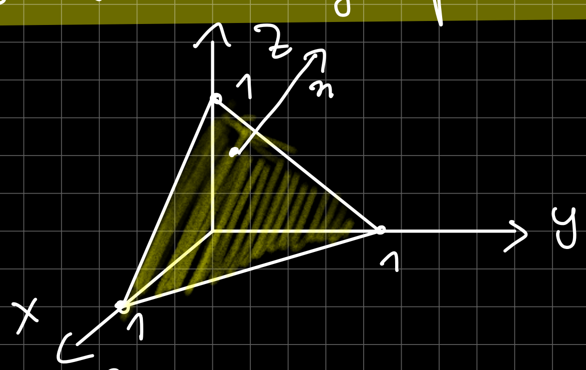
→ Аналогно се израчунавају и $\iint_{S^+} P(x,y,z)\,dydz$ и $\iint_{S^+} Q(x,y,z)\,dxdz$

обрати пажњу!

пројекција на Oyz

пројекција на Oxz

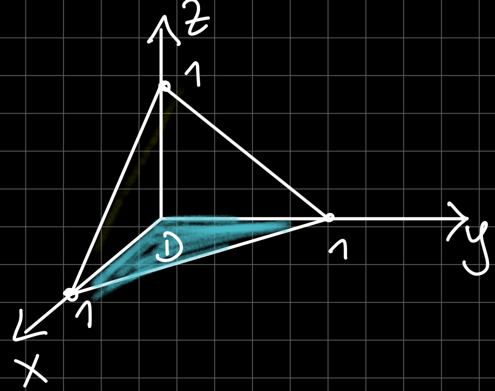
пример Израчунати $\iint_{S^+} z\,dxdy + x\,dxdz + y\,dydz$, где је S спољашњи део равни $x+y+z=1$ у првом октанту.



I збир 3 површ. инт. II врсте

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \iint_{S^+} z\,dxdy$$

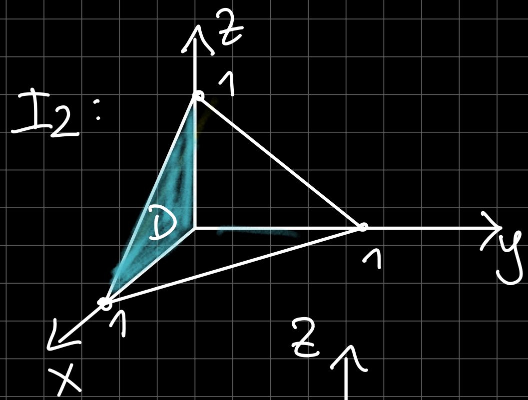


$$I_1 = \iint_{S^+} z\,dx\,dy = \iint_D (1-x-y)\,dx\,dy =$$

$$z = z(x,y) = 1-x-y$$

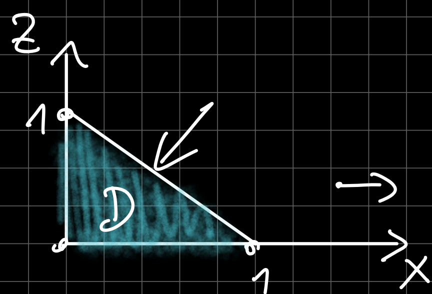
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy = \dots = \frac{1}{6}$$

I_2:



$$I_2 = \iint_{S^+} x\,\underbrace{dx\,dz} = \iint_D x\,dx\,dz =$$

у двојном интеграл да остану само x и z ✓



$\rightarrow$ $x \in [0,1]$
$z \in [0, 1-x]$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x\,dz = \dots$$

I_3: ...

ВЕЗА ИЗМЕЂУ ПОВРШИНСКОГ ИНТЕГРАЛА ПРВЕ ВРСТЕ И ОСТАЛИХ ИНТЕГРАЛА

ВЕЗА: ПОВРШ. I ВРСТЕ И ПОВРШ. II ВРСТЕ

Ако су ф-је $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непр. и ако је правац нормале површи S одређен вектором $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ тада важи:

$$\underbrace{\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy}_{\text{површ. II врсте}} = \underbrace{\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma}_{\text{површ. I врсте}}$$

СТОКСОВА ФОРМУЛА

Ако су ф-је $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непр. заједно са својим парц. изводима првог реда на површи S, и ако је C затворена крива која ограничава површ S, тада важи:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma$$

КРИВ. II ВРСТЕ

ПОВРШ. I ВРСТЕ

$$\begin{array}{cccc} \leftarrow & & \leftarrow & \\ P & Q & R & P \\ x & y & z & x \end{array}$$

додатно $\rightarrow$

$$= \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ПОВРШ. II ВРСТЕ

ФОРМУЛА ГАУСА-ОСТРОГРАДСКОГ

Ако су ф-је $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непр. заједно са својим парц. изводима првог реда на затвореној области V, ограниченој са затвореном површи S, тада важи:

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

ПОВРШ. I ВРСТЕ

ТРОЈНИ

додатно $\rightarrow$

$$= \iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

ПОВРШ. II ВРСТЕ