БИНОМНА РАСПОДЕЛА

БЕРНУЛИЈЕВИ ЕКСПЕРИМЕНТИ:

..Низ... СА 2 МОГУЋА ИСХОДА.....

нпр. десет узастопних бацања новчића чини низ Берн. експ.

Један од исхода → УСПЕХ ← p

а други → НЕУСПЕХ ← $1-p$

Нека је p верв. успеха

$$P(G) = p \qquad P(P) = 1-p$$

пример Бацамо новчић узастопно. Нека је X број ГЛАВА добијених у n независних бацања, $p(G)=p$

Нпр. $n=4$:

$$p_X(2) = p_X(X=2) = P(\overbrace{GGPP}^{p\cdot p(1-p)(1-p)}) + P(GPGP) + P(GPPG) + P(PGPG) + P(PPGG) + P(PGGP)$$

$$= 6 \cdot p^2 (1-p)^2$$

$$= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$$

GGPP
GPGP
GPPG
PGPG
PPGG
PGGP

од 4 места бирамо 2 где стављамо главу

– Нека је $X=k$, уместо 2:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$$

– За опште n

БИНОМНА РАСПОДЕЛА

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

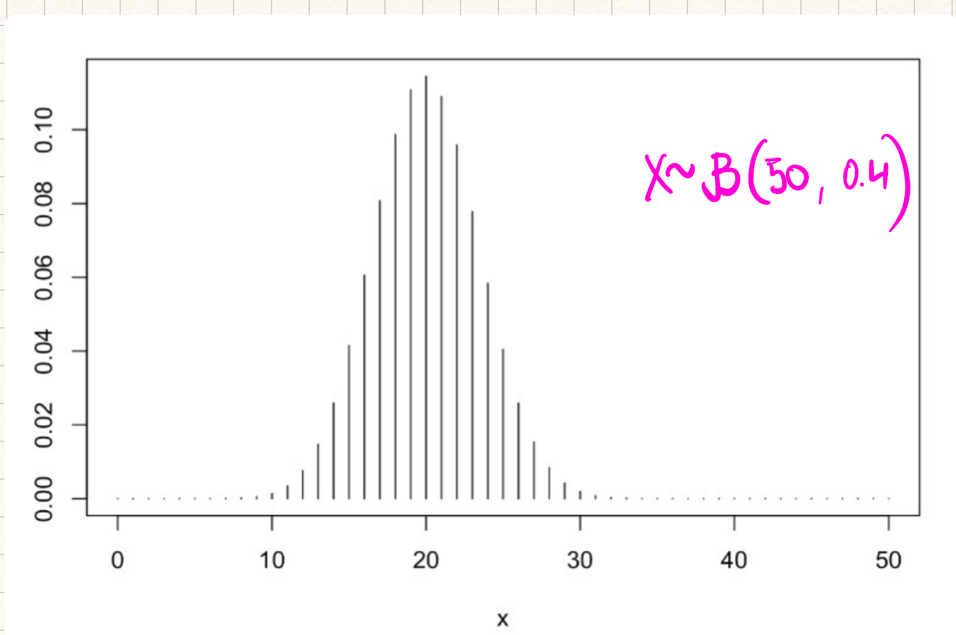
Биномна ф. коефиц. $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

Берн. експ. са вероватноћом успеха p се изводе n пута, од којих је k успеха.
Ако је X сл. вел. која представља број тих успеха, тада кажемо да она има **БИНОМНУ РАСПОДЕЛУ** и означавамо

$$X \sim B(n, p)$$

$$\boxed{X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ \underbrace{\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n}_{(1-p)^n} & \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} & \dots & \underbrace{\binom{n}{n} p^n (1-p)^0}_{p^n} \end{pmatrix}}$$

$E(X) = ?$ $\quad D(X) = ?$



$$E(X) = 0\cdot\binom{n}{0}p^0(1-p)^n + 1\cdot\binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1} + \dots + n\cdot\binom{n}{n}p^n(1-p)^0$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ \binom{n}{0}p^0(1-p)^n & \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1} & \dots & \binom{n}{n}p^n(1-p)^0 \\ \downarrow & & & \downarrow \\ (\ )^n & & & p^n \end{pmatrix}$$

Можемо тако, али је компликовано..

ТРИК!

X растављамо на збир ЈЕДНОСТАВНИХ СЛ. ВЕЛИЧИНА – ИНДИКАТОРА!

$$I: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Уводимо инд. за сваки експ. у низу

$$\begin{array}{ccccc} \text{успех} & & & \text{успех} & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & \end{array}$$

← бележи да ли се у i-том експерименту добио успех

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{успех у } i\text{-том покушају} \\ 0, & \text{неуспех} \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = n\cdot p}$$

$$\Rightarrow \quad X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

$$E(X) = ?$$

сме E да прође кроз збир

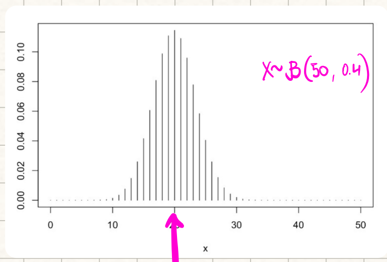
$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = (*)$$

$$E(X_i) = ? \qquad X_i: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \Rightarrow E(X_i) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$(*) = n\cdot p$$

$$X \sim B(n,p) \Rightarrow E(X) = n\cdot p$$

МАТЕМАТ. ОЧЕКИВАЊЕ СЛ. ВЕЛ. СА БИНОМНОМ РАСП.



$$X \sim B(\overset{n}{50}, \overset{p}{0.4})$$

$E(X)=20$, али може и преко формуле $E(X)=50 \cdot 0,4=20$

А дисперзија?

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$D(X_i) = \underbrace{E(X_i^2)}_{?} - [\underbrace{E(X_i)}_{p}]^2$$

квадр. само горњи ред

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \rightarrow X_i^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \Rightarrow E(X_i^2) = p$$

$$D(X_i) = p - p^2 = p(1-p)$$

$$D(X) = D(X_1+X_2+\dots+X_n) = D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+\dots+D(X_n)$$

може D кроз + јер су независне

$$D(X) = n \cdot p(1-p)$$

ДИСПЕРЗИЈА СЛ. ПРОМЕНЉИВЕ СА БИНОМНОМ РАСПОДЕЛОМ

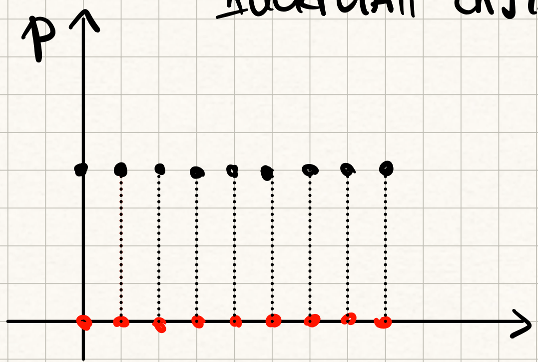
$$X \sim B(n,p) \Rightarrow D(X) = n \cdot p(1-p)$$

ДИСПЕРЗИЈА СЛ. ВЕЛИЧИНЕ СА БИНОМНОМ РАСПОД.

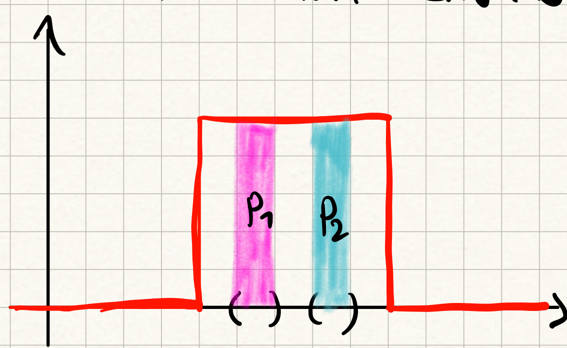
УНИФОРМНА РАСПОДЕЛА

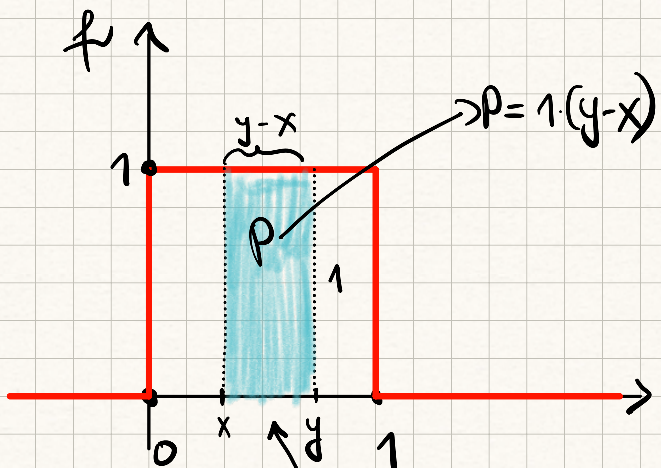
ДЕФ: . . . (или сви интервали исте дужине) једнако вероватни.

ДИСКРЕТАН СЛУЧАЈ



НЕПРЕКИДАН СЛУЧАЈ





Нека је X сл. вел. која може узимати произвољне вредности у интервалу [0,1) и важи

$$P(x \le X \le y) = y - x$$

Расподела сл. променљиве X на сегменту [0,1] назива се УНИФОРМНОМ РАСПОДЕЛОМ и:

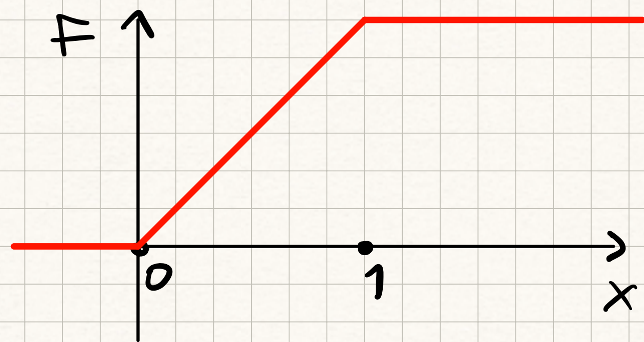
$$X \sim \mathrm{Unif}[0,1] \quad \text{или} \quad X \sim \mathcal{U}[0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$F(x) = ?$

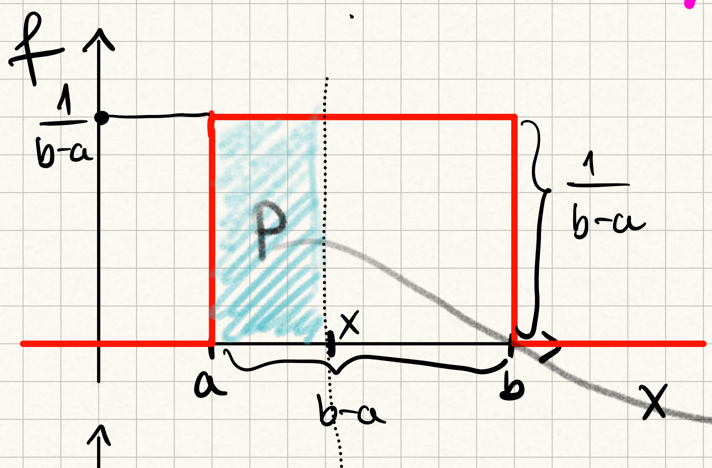
$$F(x)=\int_0^x f\,dt=\int_0^x 1\cdot dt=t\Big|_0^x=x$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$



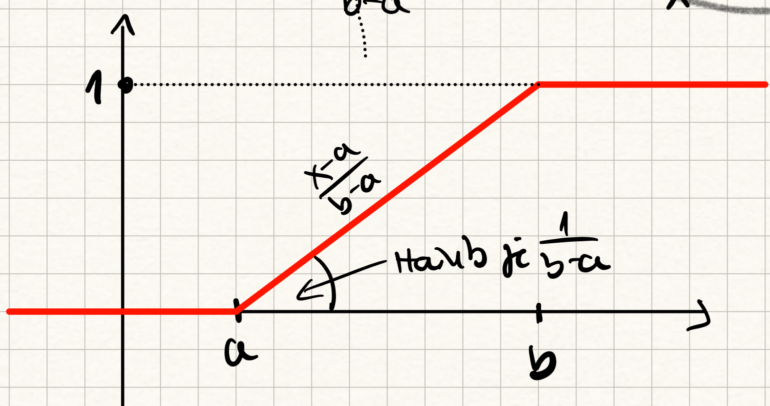
– како изгледа униформна расподела на произвољном инт. $[a,b]$

$$X \sim \mathcal{U}[a,b]$$



$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

$$P=(x-a)\cdot\frac{1}{b-a}$$



$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dt=\int_a^x \frac{1}{b-a}\cdot dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot t\Big|_a^x=\frac{x-a}{b-a}$$

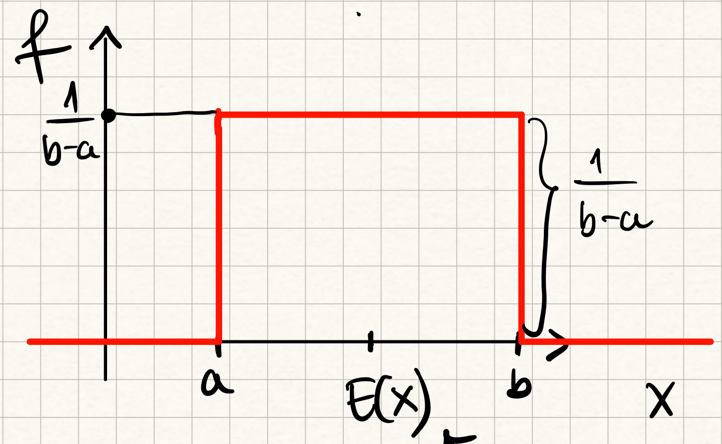
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

$E(X)=?$ $\quad D(X)=?$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{b-a}\cdot dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\cdot dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{(b-a)} \cdot 2} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$



на средини интервала

$$X \sim U[a,b] \quad \Rightarrow \quad E(X) = \frac{a+b}{2}$$

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ СЛ. ВЕЛ СА УНИФОРМНОМ РАСП.

$D(X) = ?$

$$D(X) = E(X^2) - [\underbrace{E(X)}_{\frac{a+b}{2}}]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ba+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

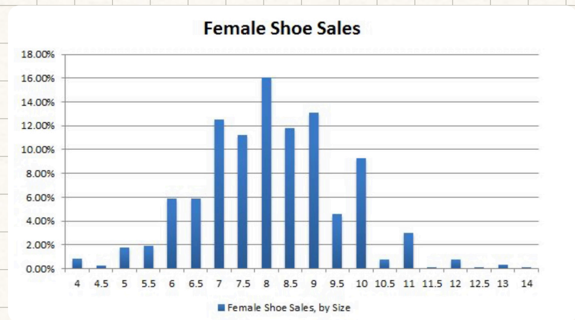
$$D(X) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

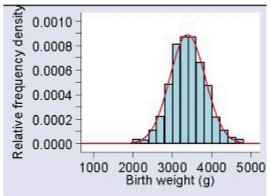
$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$X \sim U[a,b] \quad \Rightarrow \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ДИСПЕРЗИЈА СЛ. ВЕЛ СА УНИФОРМНОМ РАСП.

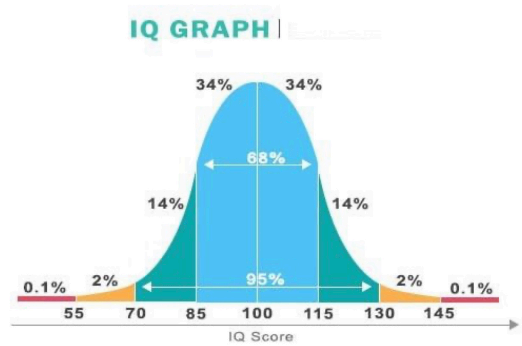
НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА

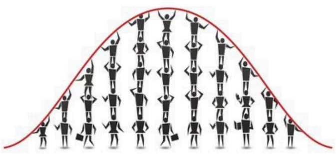




The normal birth weight of a newborn ranges from 2.5 to 3.5 kg. The majority of newborns have normal birthweight whereas only a few percent of newborns have a weight higher or lower than normal. Hence, birth weight also follows the normal distribution curve.

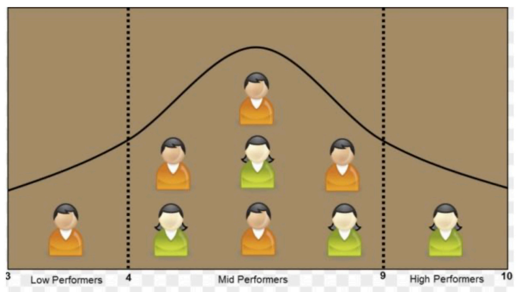
4. IQ

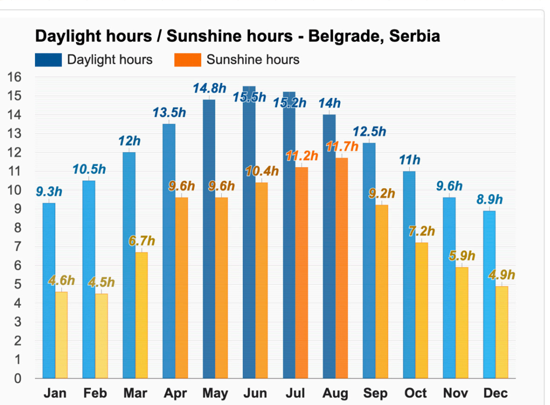


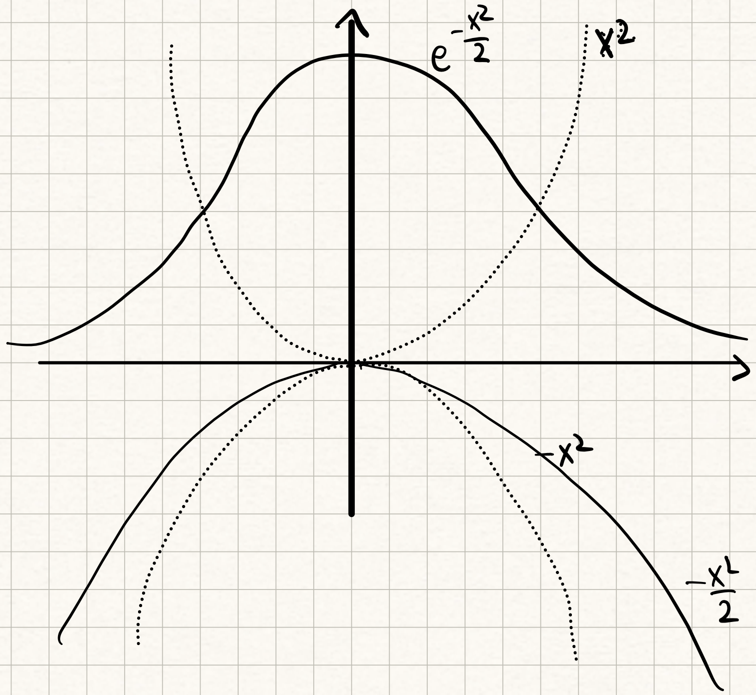


The height of people is an example of normal distribution. Most of the people in a specific population are of average height. The number of people taller and shorter than the average height people is almost equal, and a very small number of people are either extremely tall or extremely short. Several genetic and environmental factors influence height. Therefore, it follows the normal distribution.

9. Student's Average Report

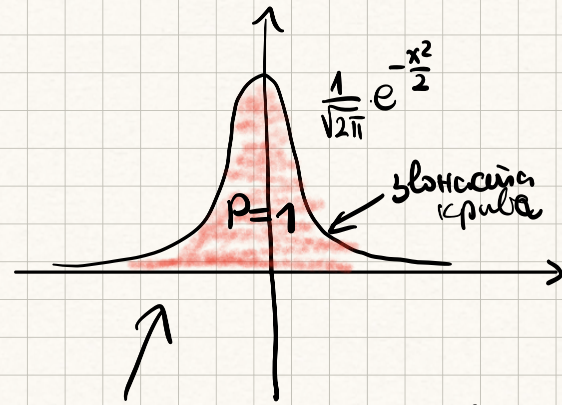






$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

због овога да би $P=1$



Сада имамо $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$

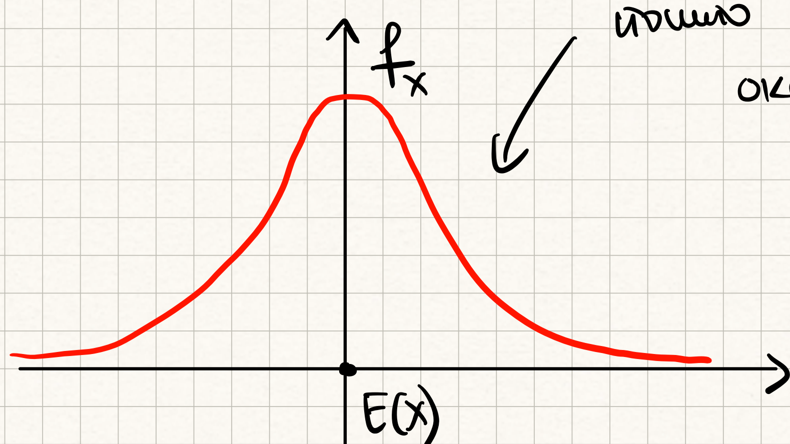
Сада ово може бити фја густине $f_X(x)$

Ако је X непр. сл. величина са фјом густине

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

тада кажемо да X има СТАНДАРДНУ НОРМАЛНУ РАСПОД.

$E(X) = ?$ $D(X) = ?$



пошто је график симетр. око y-осе $\Rightarrow$ $E(X) = 0$

Може се и показати:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots$$

$D(X) = 1$ ← може се показати

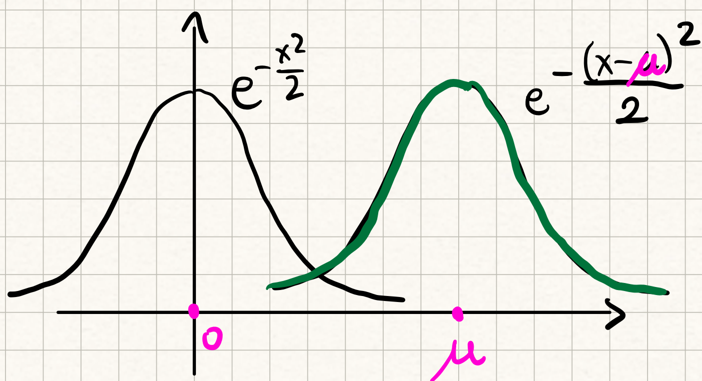
Ако X има ст. нормалну расподелу, тада је
$E(X)=0$, $D(X)=1$ и пишемо

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

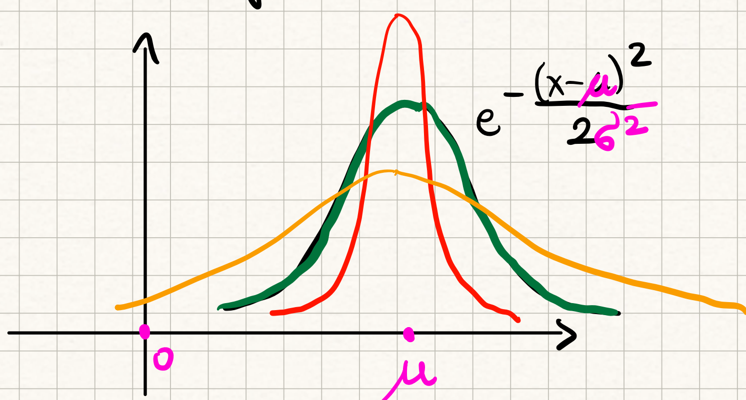
дисперзија

мат. очекивање

- Шта ако хоћемо центар у другом броју? μ



- Шта ако хоћемо да сужавамо/ширимо график
⇒ додајемо додатну константу, нпр σ^2



Више не важи $\int_{-\infty}^{\infty} = 1$

↓

мењамо у $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ← да додамо $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1$$

Ако је X непр. сл. величина са ф-јом густине

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

тада X има **НОРМАЛНУ РАСПОДЕЛУ** СА параметрима μ и σ, и користи се ознака

$$X\sim\mathcal{N}(\underbrace{\mu}_{E(X)},\ \underbrace{\sigma^2}_{D(X)})$$

$E(X)=\mu$
$D(X)=\sigma^2$

$E(X)=?$ $D(X)=?$

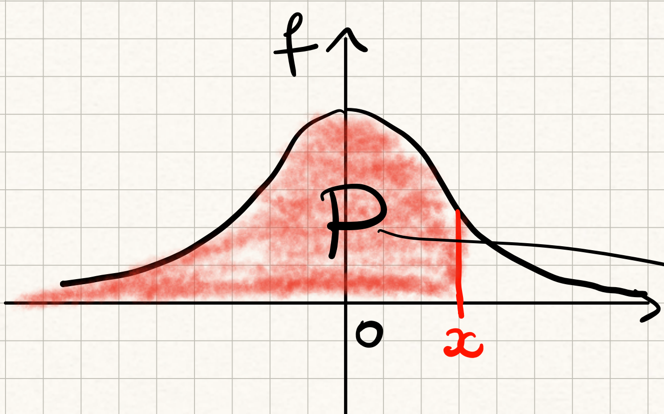
↓ график је симетричан око $\mu \Rightarrow E(X)=\mu$

Може се показати да је $D(X)=\sigma^2$

Ф-ЈА РАСПОДЕЛЕ

$$F_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

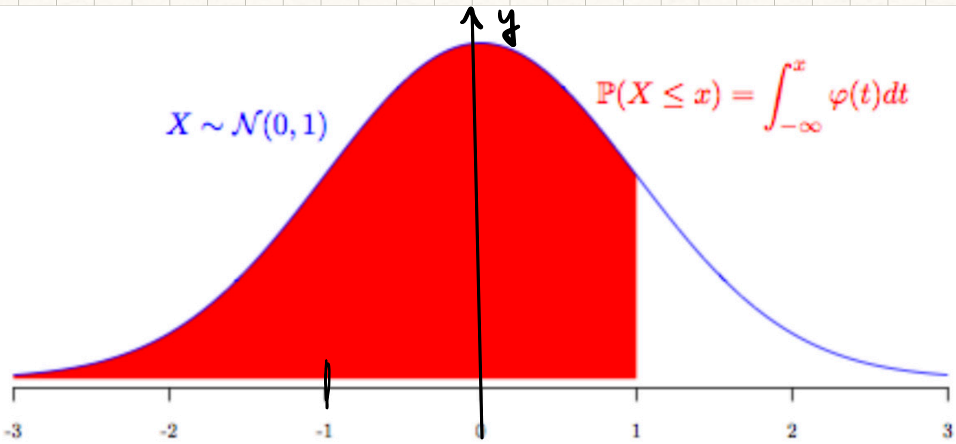
Посматрајмо посебно случај $X\sim\mathcal{N}(0,1)$



$$\Phi(x)=F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=P(X\le x)$$

једнако

$\frac{0,25}{0,05}$

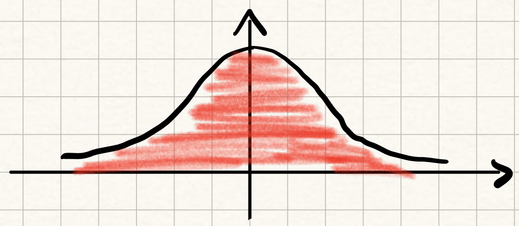


$F(-1) = 1 - F(1)$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

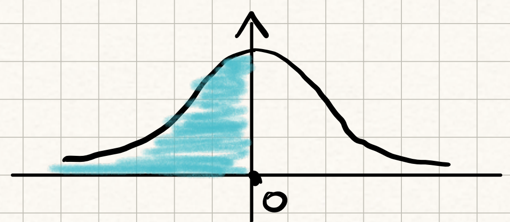
$P(X \le \underline{0,63}) = \left| \begin{array}{ll} \text{врста} & 0,6 \\ \text{колона} & 0,03 \end{array} \right| = 0,7357$ ← како тражимо у таблицама

ОСОБИНЕ за $\mathcal{N}(0,1)$

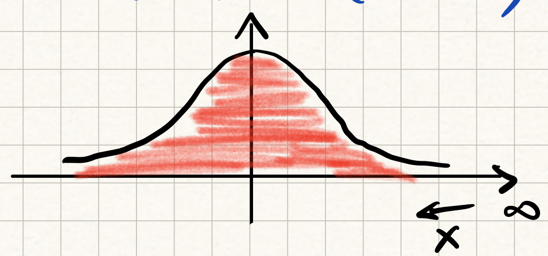


– график је симетричан око y-осе
– P испод целог графика = 1

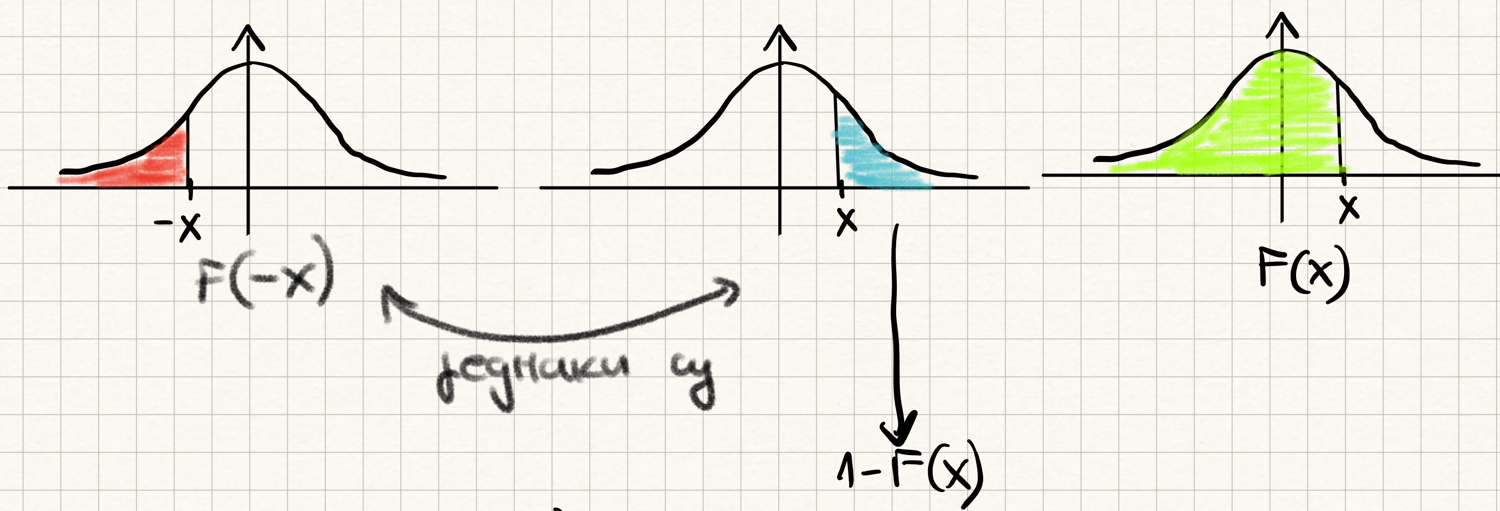
1° $F(0) = P(X \le 0) = 0{,}5$



2° $F(+\infty) = P(X \le +\infty) = 1$ $\quad$ $F(-\infty) = P(X \le -\infty) = 0$

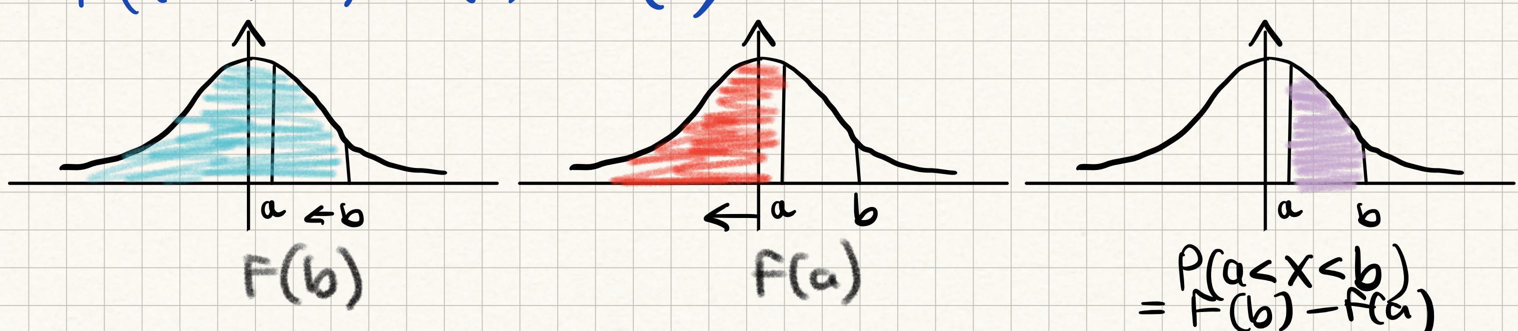


3° $F(-x) = ?$



$\Rightarrow \quad F(-x) = 1 - F(x)$

4° $P(a<X<b) = F(b) - F(a)$



5° Ако X има нормалну расподелу, тада и $Y = \alpha \cdot X + \beta$ има нормалну расподелу

Шта да радимо ако имамо $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, како да одредимо $P(X \le x)$ $\Rightarrow$ СТАНДАРДИЗАЦИЈА

нису 0 и 1

пример $X \sim \mathcal{N}(2, 16)$. $P(X \le 3) = ?$

$\mu = 2 = E(X)$

$D(X) = 16$

$\sigma^2 = 16, \ \sigma = 4$

Посматрамо $Y = \dfrac{X-2}{4}$ $\qquad \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

Зашто смо баш овако формирали Y?

$E(Y) = ? \quad D(Y) = ?$

$$E(Y) = E\left(\frac{X-2}{4}\right) = \frac{1}{4} E(X-2) = \frac{1}{4}\left[E(X) - E(2)\right] = \frac{1}{4}\left[E(X) - 2\right] = \frac{1}{4}(2-2) = 0$$

$\Rightarrow \underline{E(Y) = 0}$!

$$D(X) = D\left(\frac{X-2}{4}\right) = \frac{1}{16} D(X-2) = \frac{1}{16} \cdot D(X) = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1$$

$\underline{D(Y) = 1}$

$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(X \le 3) = P(X - 2 \le 3 - 2) = P\left(\frac{X-2}{4} \le \frac{3-2}{4}\right) = P(Y \le 0{,}25)$$

$\Rightarrow$ У таблицама тражимо, а не !

$P(Y \le 0{,}25) = 0{,}5987$

ТЕОРЕМА: Ако сл. променљива X има норм. расподелу $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тада случајна променљива

$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ има стандардну нормалну расподелу, тј

$$Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$