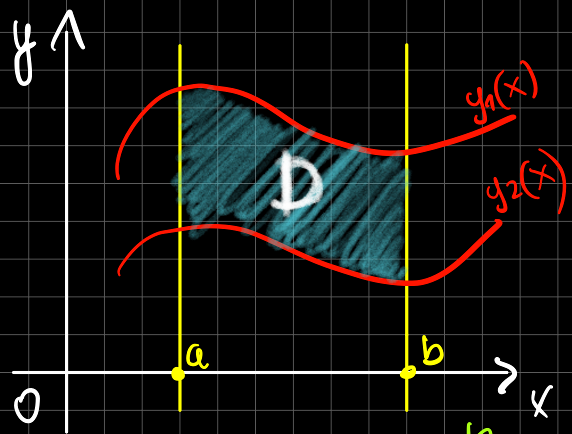
Двојни интеграл (наставак)

Израчунавање:

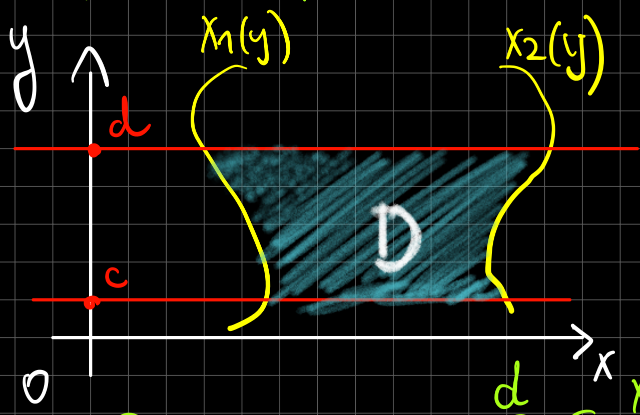
- Нпр. да се област D може преко сист. неједнакости:



$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

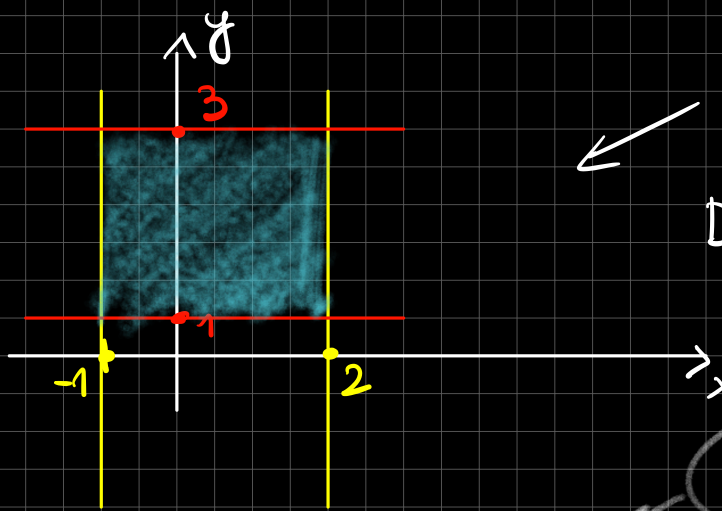
- Аналогно, ако се област D може преко:



$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

пример 1 $\iint_D (x+y)^2\,dxdy$, $D=[-1,2]\times[1,3]$



било који од горња два случаја

$$D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3\}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\iint_D (x+y)^2\,dxdy=\int_{-1}^{2}dx\underbrace{\int_1^3 (x+y)^2\,dy}_{\text{прво решавамо } dy}=\int_{-1}^{2}dx\int_1^3\left(x^2+2xy+y^2\right)dy$$

$$=\int_{-1}^{2}dx\left[x^2y+2x\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_1^3=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left[x^2\cdot 3+\cancel{2}x\cdot\frac{9}{\cancel{2}}+\cancel{\frac{27}{3}}\,9-x^2\cdot 1-\cancel{2}x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-\frac{1}{3}\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(2x^2+8x+\frac{26}{3}\right)\cdot dx$$

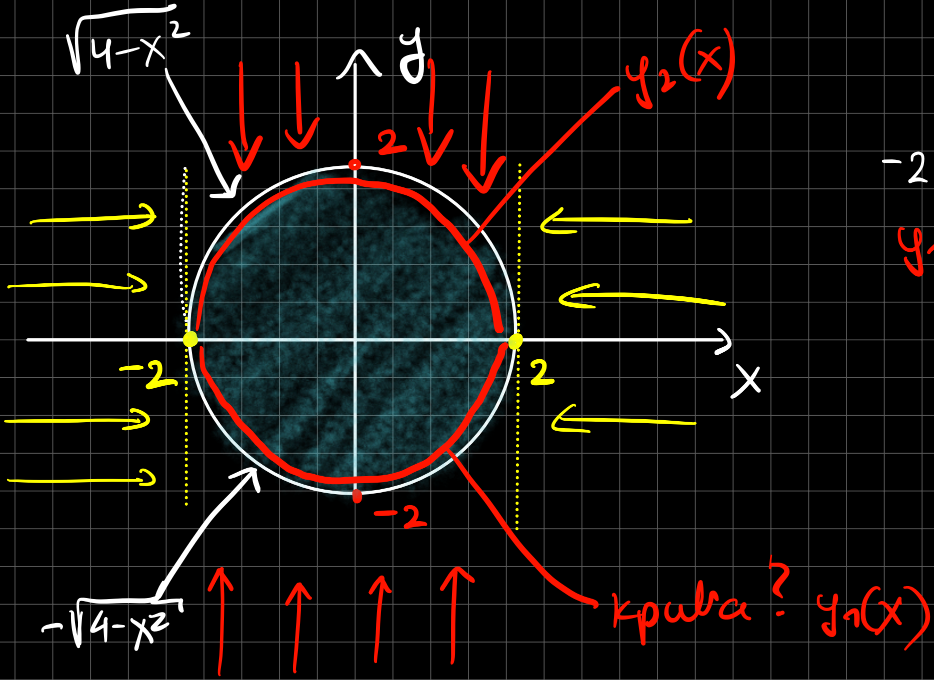
у овом интегралу смо морали да останемо без y !

$$=2\frac{x^3}{3}+8\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{26}{3}\cdot x\ \Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\ \dots\ =44$$

пример 2. Представити интеграле у облику $\int dx\int f\,dy$ и $\int dy\int f\,dx$, ако је D дато:

а) $D:\ x^2+y^2\le 4$



$-2 \le x \le 2$

$y_1(x) \le y \le y_2(x)$

$x^2+y^2=4$

↓ изразимо y преко x

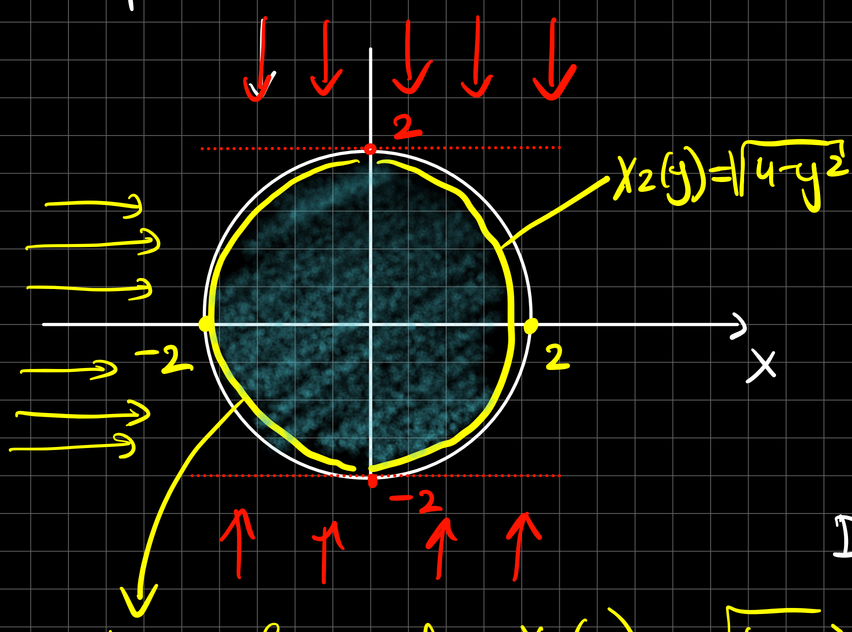
$y^2=4-x^2$

$y=\pm\sqrt{4-x^2}$

$\Rightarrow y_2(x)=\sqrt{4-x^2}, \quad y_1(x)=-\sqrt{4-x^2}$

$$\iint f\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy$$

Други начин?



ј-на ове криве $x_1(y)=-\sqrt{4-y^2}$

$-2 \le y \le 2$

Шта је са границама за x?

x треба изразити преко y

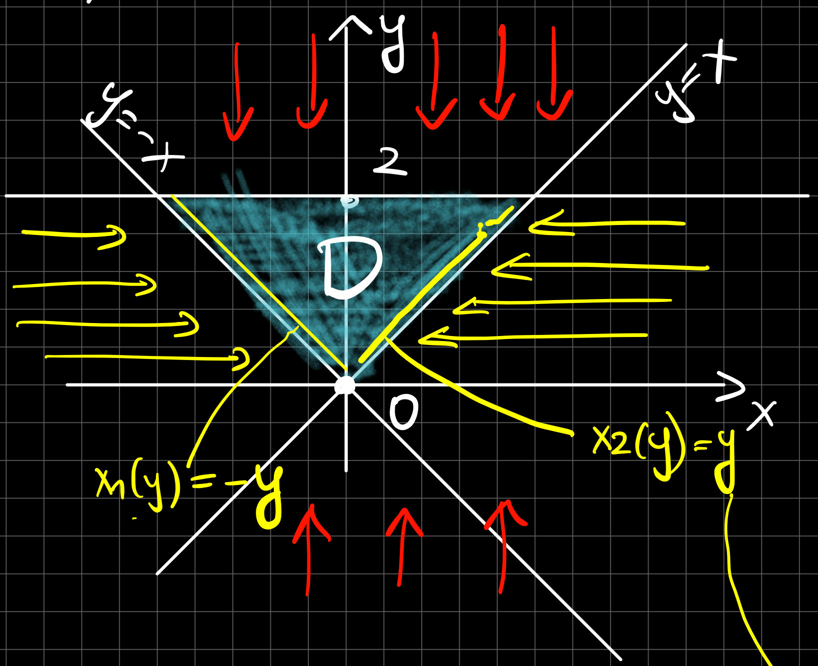
$x^2+y^2=4$

$x^2=4-y^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$

$D=\{(x,y) \mid -2\le y\le 2, -\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\}$

$$\iint f\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx$$

б) D: $y=x$, $y=-x$, $y=2$



Прво разматрамо облик $\int dy \int f\,dx$

Границе за y?

$0 \leq y \leq 2$

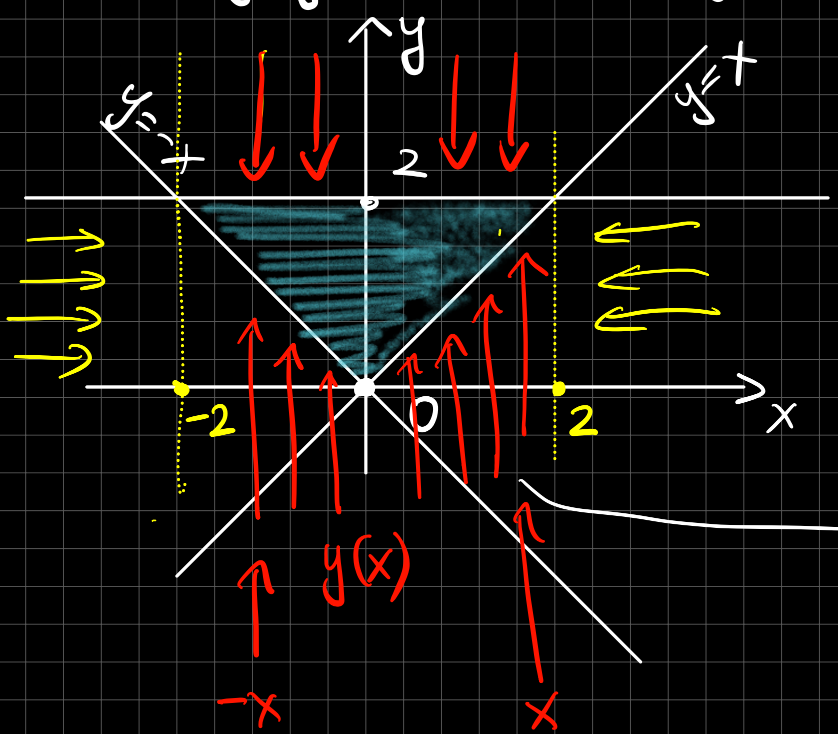
За x?

са леве стране наилазимо на $y=-x$

$-y \leq x \leq y$

$$D=\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ -y \leq x \leq y\}$$

А случај $\int dx \int f\,dy$



Шта је са границама за x?

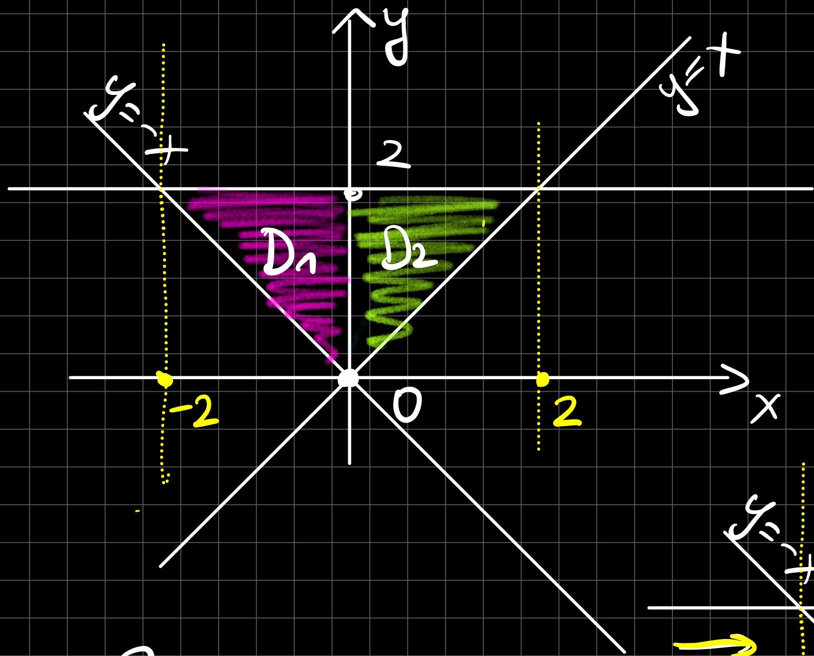
$-2 \leq x \leq 2$

Шта је са гр. за y?

$y \leq 2$

Да ли можемо границе описати једном јном? Не!

зато D делимо на два дела!



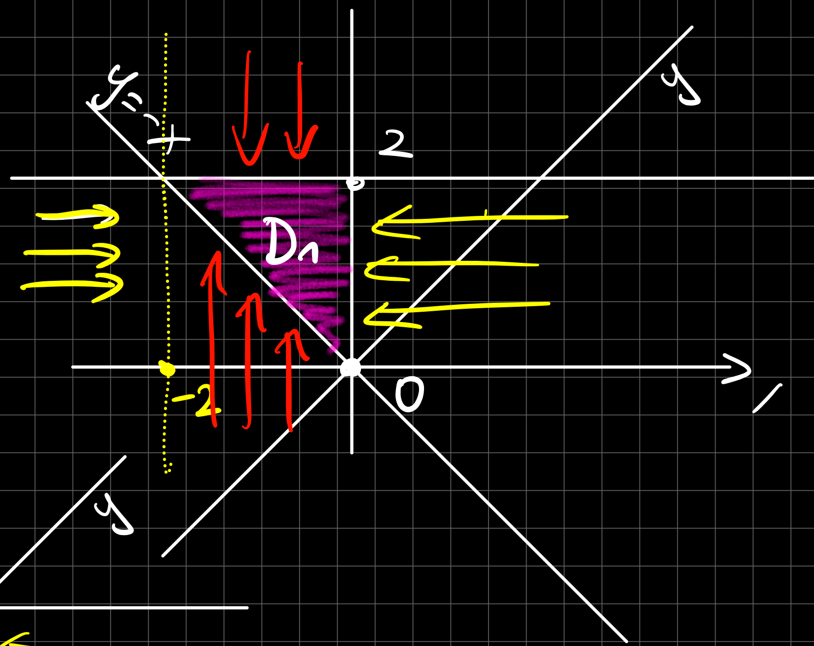
$D = D_1 + D_2$

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy$$

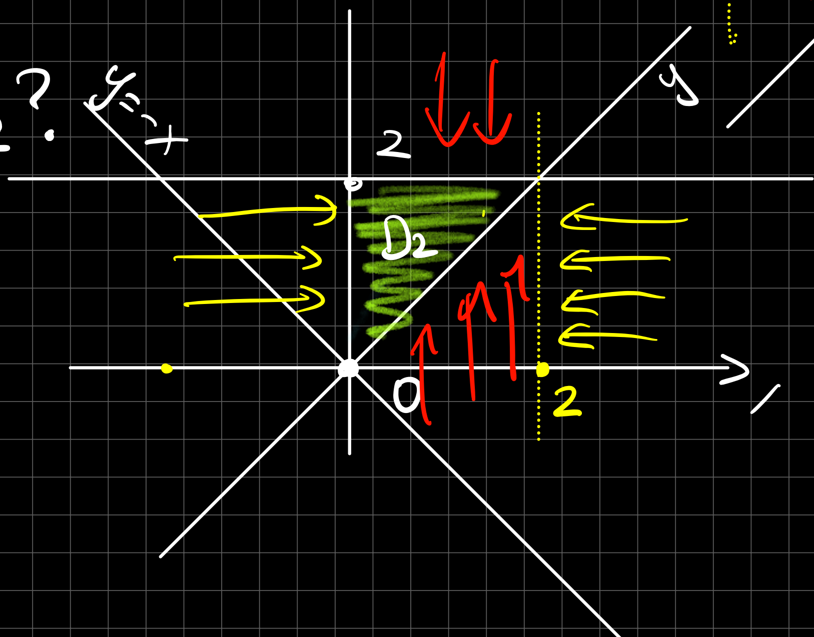
D_1?

$-2 \le x \le 0$

$-x \le y \le 2$



D_2?



$0 \le x \le 2$

$x \le y \le 2$

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{0} dx \int_{-x}^{2} f\,dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x}^{2} f\,dy$$

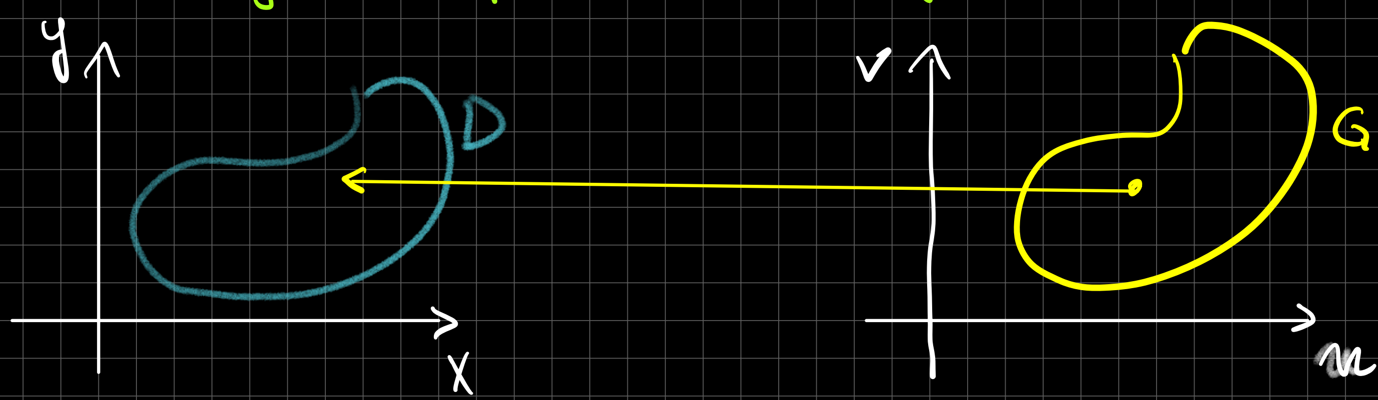
СМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ

Посм. дв. инт. $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ у правоуг. коорд. сист. Пп. да се пром. x и y могу представити као ф-је две пр. u и v:

$x = x(u,v)$

$y = y(u,v)$, при чему су те ф-је непрек., заједно са својим парц. изводима I реда, на некој затв. обл. G у равни Ouv.

Пп. да те ф-је пресликавају $G \to D$



Тада важи:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)\,\big|J(u,v)\big|\,du\,dv$$

где је

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \leftarrow$$ ЈАКОБИЈАН ПРЕСЛИКАВАЊА

u, v се зову КРИВОЛИНИЈСКЕ КООРДИНАТЕ.

НАЈВАЖНИЈИ СЛУЧАЈ КРИВОЛИНИЈСКИХ КООРДИНАТА СУ:

ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ

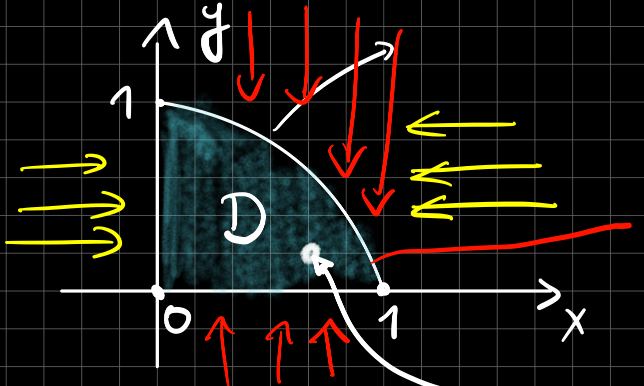
$$\left.\begin{aligned} x &= x(\rho,\varphi) = \rho\cdot\cos\varphi \\ y &= y(\rho,\varphi) = \rho\cdot\sin\varphi \\ \rho &\geq 0 \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned}\right\}$$

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} (\rho\cos\varphi)'_\rho & (\rho\cos\varphi)'_\varphi \\ (\rho\sin\varphi)'_\rho & (\rho\sin\varphi)'_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

$$\Rightarrow \quad J(\rho,\varphi) = \underline{\underline{\rho}}$$

Пример: Израчунати $\iint (2x-3y)\,dx\,dy$ где је D део круга $x^2+y^2=1$ у првом квадранту.

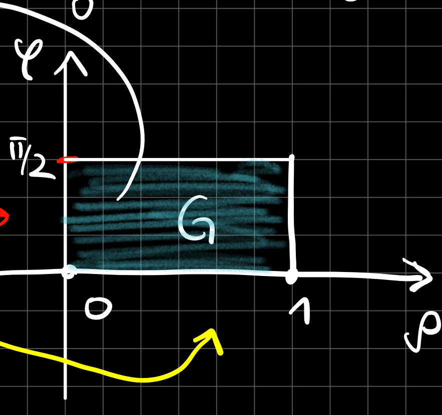


$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

$y = \sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2x-3y)\,dy = \ldots$$



Трансформацијама

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$0 \leq \rho \leq 1$

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$\Rightarrow \quad J = \rho$

$$\iint_D (2x-3y)\,dxdy = \iint_G (2\rho\cos\varphi - 3\rho\sin\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} (2\rho\cos\varphi - 3\rho\sin\varphi)\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} (2\rho^2\cos\varphi - 3\rho^2\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 d\rho \left[2\rho^2\sin\varphi + 3\rho^2\cos\varphi\right]\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \int_0^1 \left[2\rho^2 + 0 - 0 - 3\rho^2\right] d\rho$$

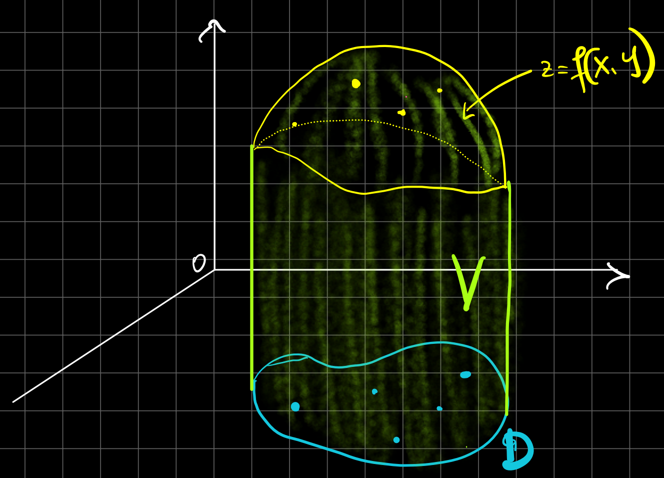
$$= \int_0^1 (-\rho^2)\,d\rho = -\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

ПРИМЕНА ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

1° Ако је D огр. област равни Oxy тада се њена ПОВРШИНА рачуна по ф-ли

$$S = S(D) = \iint_D dx\,dy$$

2° ЗАПРЕМИНА тела огр. одоздо са области D, одозго са површи $z=f(x,y)$, а са стране цилиндричном површи образоване ротацијом праве паралелне оси Oz дуж границе области D, рачуна се по ф-ли:



$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ

- Нека је V затворена област у простору $Oxyz$
- Нека је на њој деф. непр. ф-ја $u = f(x,y,z)$
- поделимо област V на n елементарних подобласти V_i чије је запр. могуће израчунати, и означимо их са Δv_i
- У свакој подобласти изаберемо тачку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$
- Нека је вредност ф-је у тим тачкама: $f(x_i, y_i, z_i)$
- Формирамо инт. суму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$$

ИНТЕГРАЛНА СУМА за ф-ју $f(x,y,z)$ у области V

ДЕФ: Уколико постоји кон. гр. вр. инт. сума σ_n када максим. од дијаметра подобласти V_i $d \to 0$, која не зависи од поделе обл. V и избора тачака M_i, онда се та гр. вред. назива ТРОСТРУКИ (ТРОЈНИ) ИНТЕГРАЛ ф-је $f(x,y,z)$ на области V и означава са:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ТЕОРЕМА: Довољан услов да тр. инт. постоји је да је ф-ја $f(x,y,z)$ непрекидна на области V.

ОСОБИНЕ:

потпуно аналогне особинама двојног интеграла...

(треба знати да се напишу...)

ИЗРАЧУНАВАЊЕ:

Нпр. да се област V може представити преко система неједначина

само x!

$$V=\{(x,y,z)\,|\,a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

Тада важи:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dy\right]dx$$

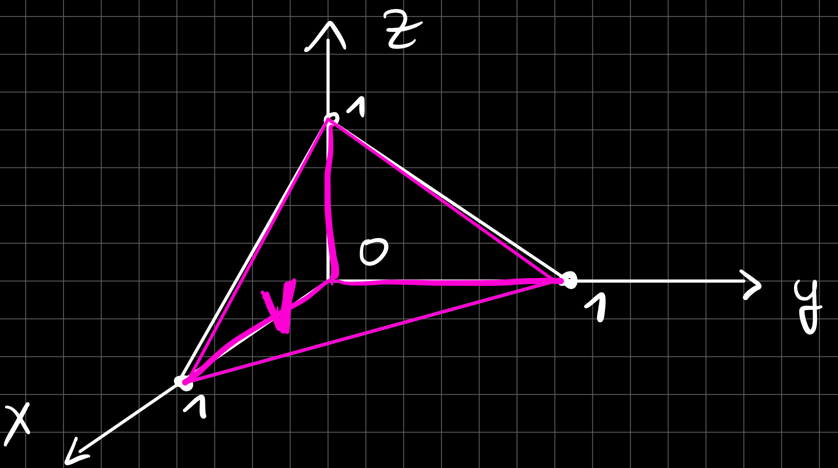
ПРИМЕНА:

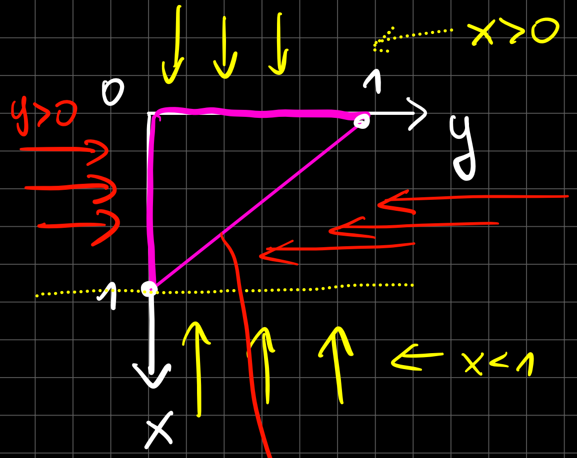
Ако је V ограничена област простора $Oxyz$ тада се њена ЗАПРЕМИНА рачуна по форм:

$$V=\iiint_V dx\,dy\,dz$$

пример Израчунати троструки инт. $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$, где је V област у првом октанту ограничена са равни $x+y+z-1=0$

$\alpha:\ x+y+z-1=0$





ј-на праве $1-x$?

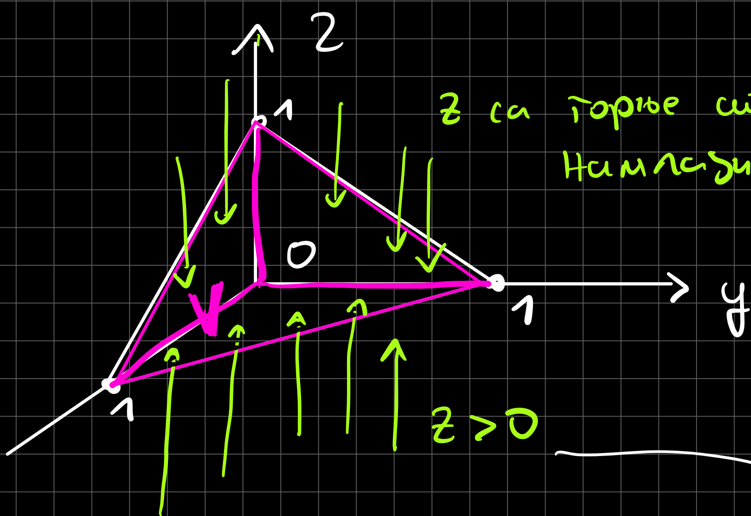
Границе за x?

$x \in [0,1]$

Границе за y? $y \in [0, 1-x]$

Ставимо у $x+y+z-1=0$
да је $z=0$
$\Rightarrow x+y-1=0$
$\Rightarrow y = 1-x$

Границе за z?



z са горње стране
налази на равни α: $x+y+z-1=0$

$z = f(x,y)$

$\Rightarrow z = 1-x-y$

$z \in [0, 1-x-y]$

$$V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x \cdot dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz \Big|_0^{1-x-y} \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x(1-x-y) - x \cdot 0 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2} \right] \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x) - x^2(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2} - 0 \right] dx =$$

$= \ldots$