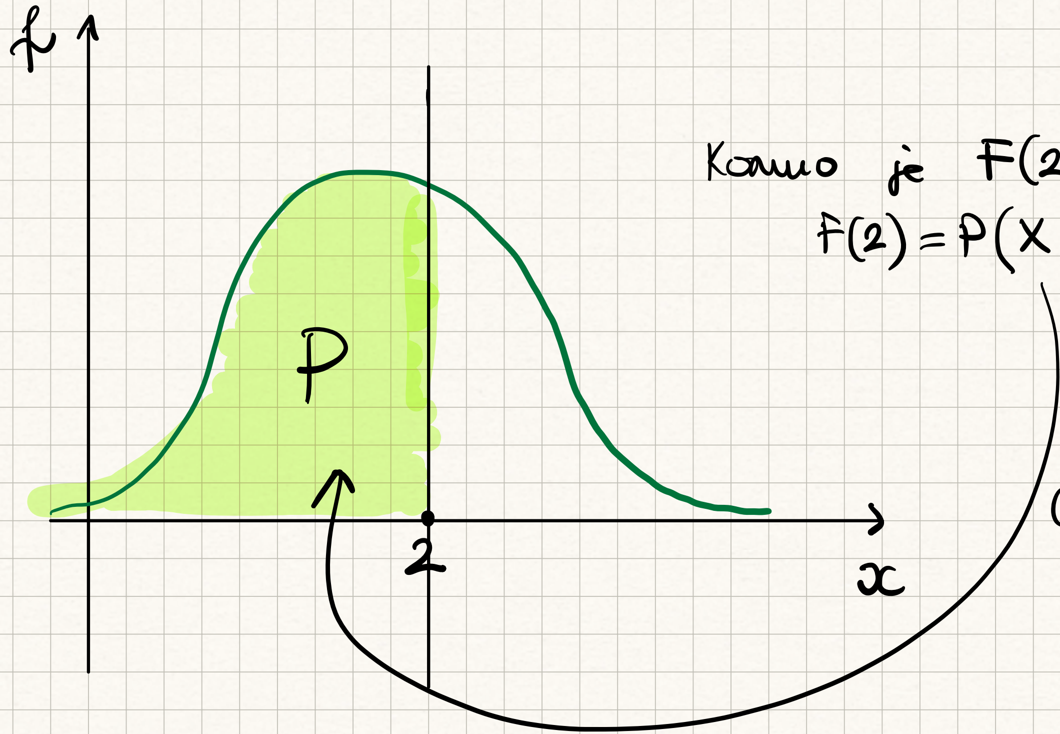
4.05.2026.

ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ X

ДЕФ. Нека је X случ. променљива. Тада се ф-ја

$F_X(x) \overset{def}{=} P(X \le x)$, $-\infty < x < \infty$ назива Ф-ЈОМ РАСПОДЕЛЕ СЛ. ПРОМЕНЉИВЕ X.



Колико је $F(2)$?

$F(2) = P(X \le 2)$

што је ова површина (ако причамо о непр. сл. пр.)

ОСОБИНЕ:

1° $0 \le F_X(x) \le 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2° F је монотоно неопадајућа

3° F је непрекидна с десна, $\lim\limits_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$ с лева

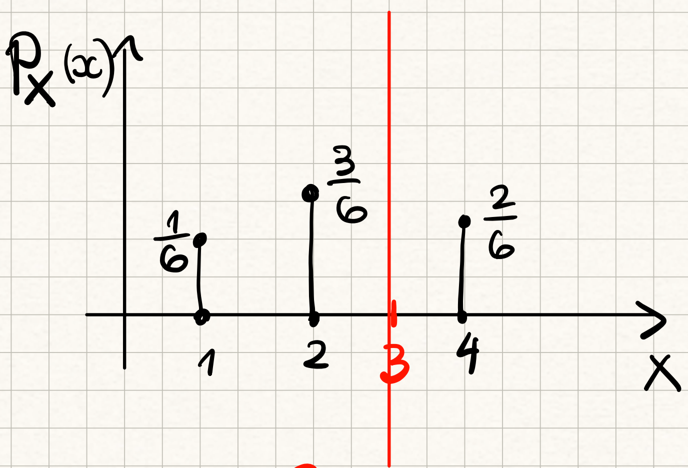
4° F има граничне вредности

5° $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

ДИСКРЕТАН СЛУЧАЈ:

X – дискр. сл. променљива

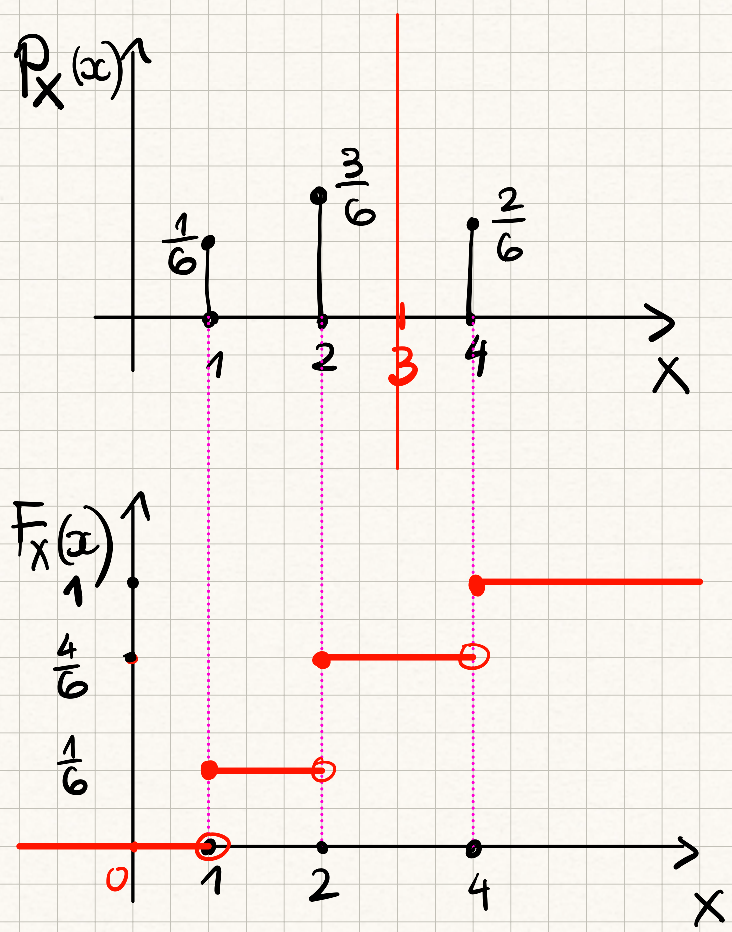


$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} p_X(k)$$

користимо ову ф-лу

F(3)? $F(3) = P(X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$



$F(0) = P(X \le 0) = 0$

$F(1) = P(X \le 1) = P(X=1) = \frac{1}{6}$

$F(1.5) = P(X \le 1.5) = P(X=1) = \frac{1}{6}$

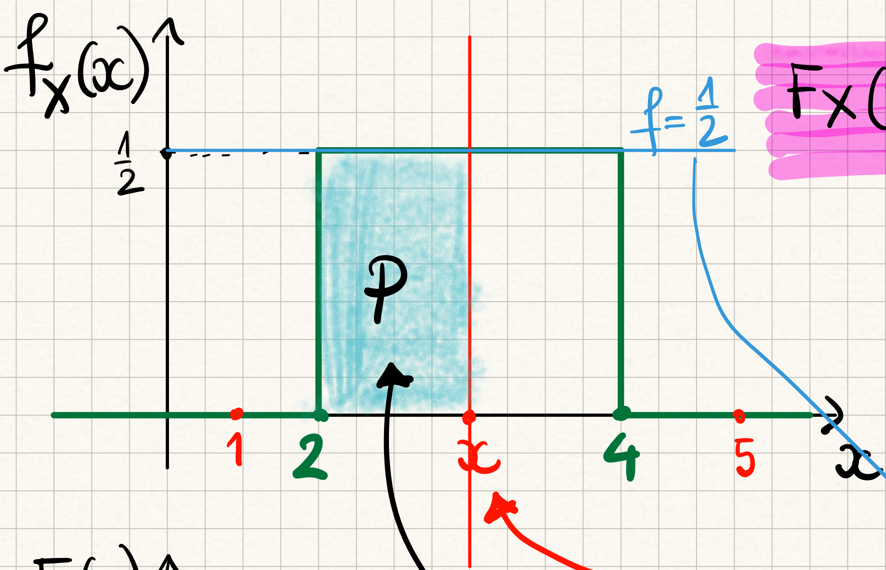
$F(2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$

$F(3) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{6} \ldots$

$F(4) = P(X \le 4) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 1$

НЕПРЕКИДАН СЛУЧАЈ:

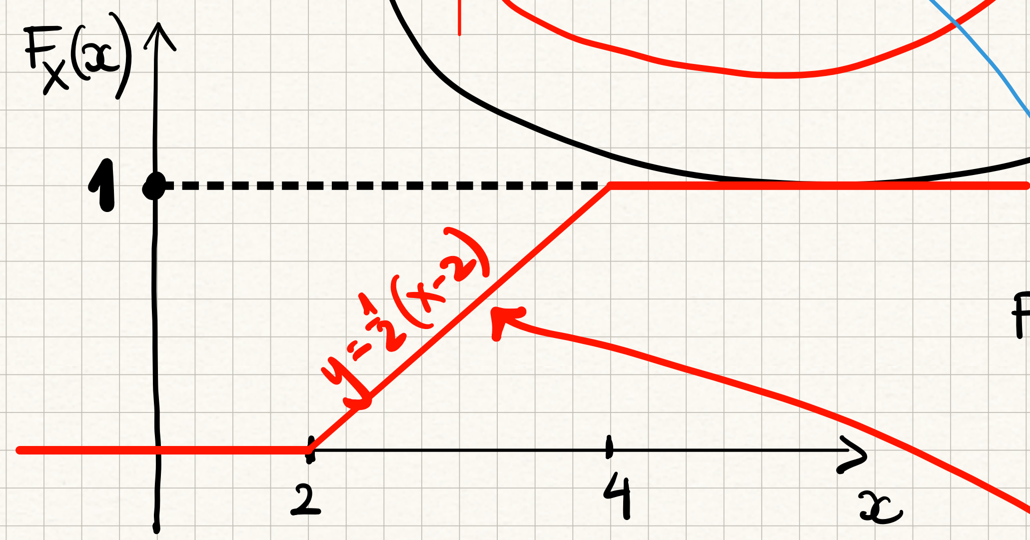
X – непр. сл. величина



$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

што је ова површина

решава-њем интеграла добијамо овај део



$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ , & 2\le x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

$F(1)=P(X\le 1)=0$

У нашем конкретном случају

за $2\le X\le 4$: $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{x}\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}t\Big|_{2}^{x}=\frac{1}{2}(x-2)$

једначина праве $y=\frac{1}{2}x-1$

T: .. $F(x)$ реална ф-ја монотоно неопад., непрекидна с десна и има гран. вредност слева тада ПОСТОЈИ СЛУЧАЈНА ПРОМ. X таква да је $F(x)$ њена расподела (и обрнуто).

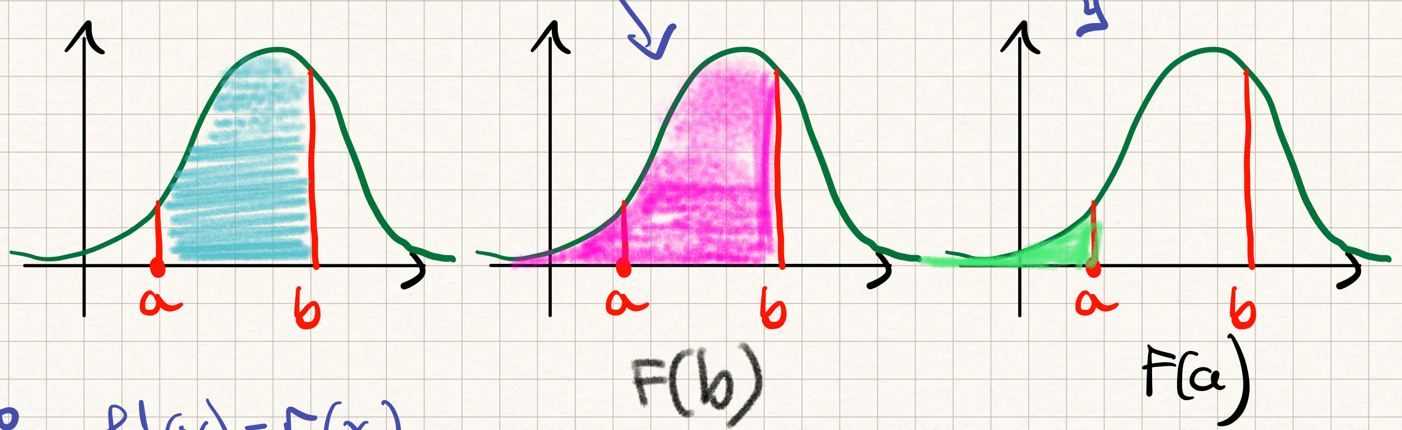
- Нека је X сл. променљива и нека је $F(x)$ њена расподела $F_X(x) = P(X \le x)$. Ако су $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ тада важи:

1° $P(X>a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$

2° $P(X=c) = 0$

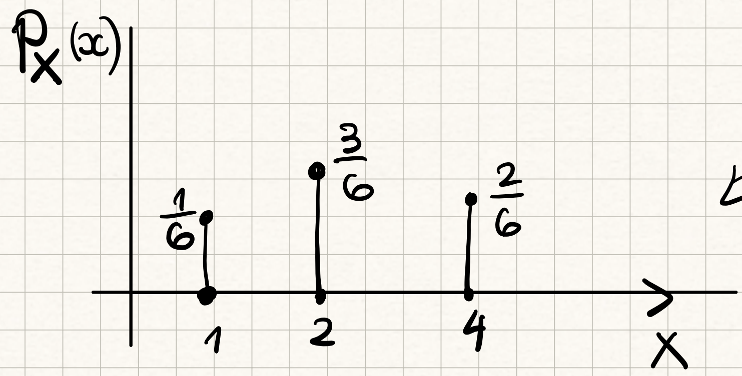
3° $P(a<X<b) = P(a<X\le b) = P(a\le X<b) = P(a\le X\le b)$

4° $P(a\le X\le b) = F(b) - F(a)$



5° $f'(x) = F(x)$

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ



Сваког дана добијемо неки износ са датим вероватноћама?

Који је просечни износ који добијемо у једном дану?

$\frac{1}{6}$ значи да ће у $\frac{1}{6} \cdot 360$ дана добити 1 дин.

$\frac{1}{6} \cdot 360 \rightarrow 1$ динар

$\frac{3}{6} \cdot 360 \rightarrow 2$ динара

$\frac{2}{6} \cdot 360 \rightarrow 4$ динара

пондерисана просек

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot\cancel{360}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot\cancel{360}\cdot 2 + \frac{2}{6}\cdot\cancel{360}\cdot 4}{\cancel{360}} = \underbrace{\frac{1}{6}\cdot 1}_{p_1\cdot x_1} + \underbrace{\frac{3}{6}\cdot 2}_{p_2\cdot x_2} + \underbrace{\frac{2}{6}\cdot 4}_{p_3\cdot x_3} = 2{,}5$$

$$X: \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{array}$$

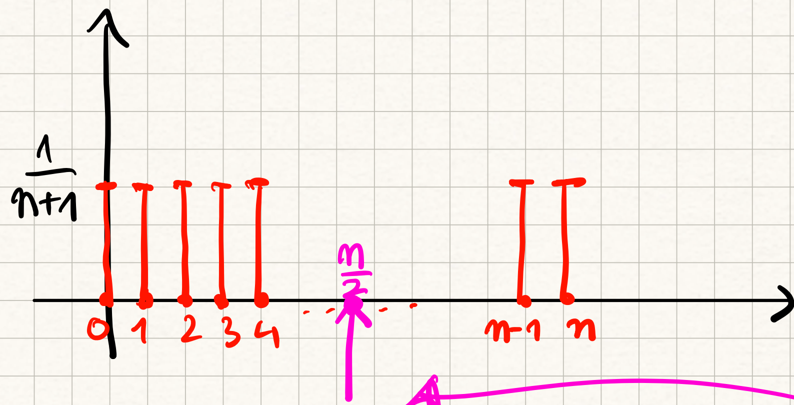
$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array}$$

$$\sum x \cdot p(x)$$

НЕ МОРА

2.5 се не налази међу овим вредности-пример:



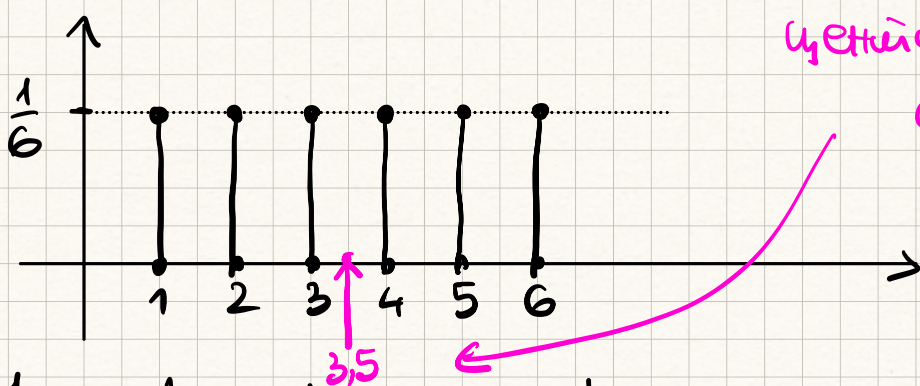
$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{n+1} + 1\cdot\frac{1}{n+1} + 2\cdot\frac{1}{n+1} + \dots + n\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}$$

пример:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

бацамо коцку

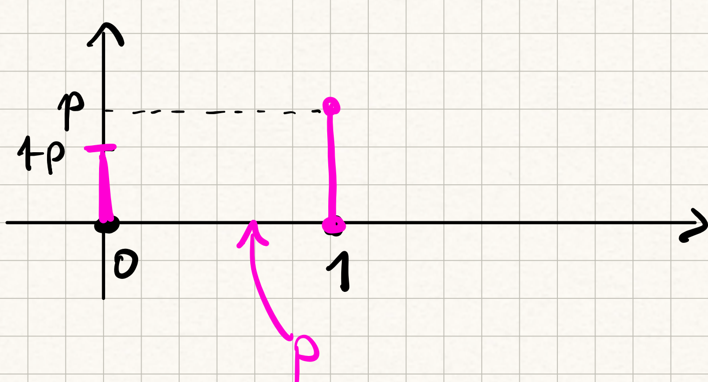
центар масе система



$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + \dots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

пример ИНДИКАТОР $I_A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$$E(I_A) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$$



ДЕФ: ... X дискр. сл. пр. која узима вредности из скупа $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и чији закон расподеле је дат са

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

где је $p_i = p(X = x_i)$, тада је њено МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$$

дискр. случај

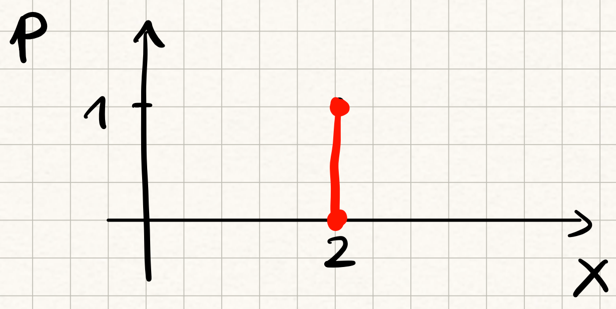
ДЕФ: Нека је X непр. сл. променљива, са фјом густине $f(x)$. Тада је њено МАТ. ОЧЕКИВАЊЕ:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

ОСОБИНЕ:

Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а X и Y сл. променљиве. Тада:

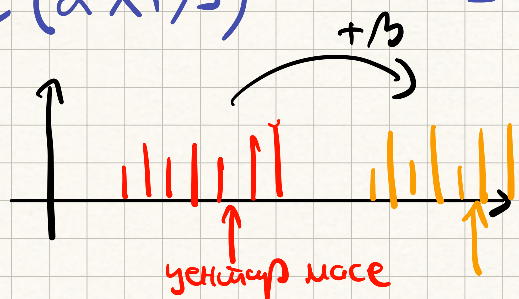
1° $E(\alpha) = \alpha$ (α = константа)



2° $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

3° $E(\alpha \cdot X + \beta) = E(\alpha X) + \beta = \alpha E(X) + \beta$

ЛИНЕАРНОСТ



4° $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

5° Ако су X, Y независне сл. променљиве, тада

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

6а° Ако је X дискр. сл. променљива, и деф. је нека ф-ја $g(x)$ тада

$$E(g(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i$$

6б° Ако је X непр. сл. пр. са густином $f(x)$, и деф. је нека $g(x)$ тада

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$$

<u>пример</u>:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad Y = g(X) = X^2$$

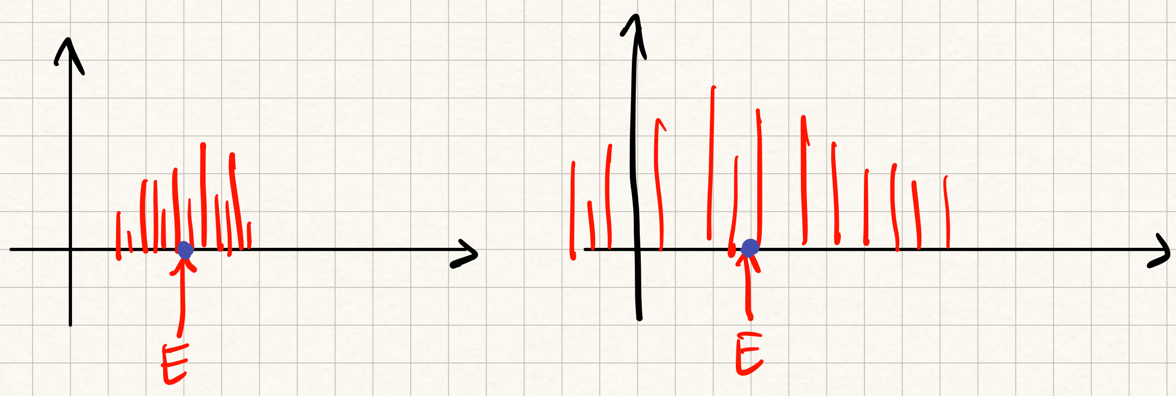
$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 = \dots$

$E(Y)$?

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \longleftarrow$$ само ово се квадрира!

$E(Y) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}5 = \dots$

ДИСПЕРЗИЈА И СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА



Дисперзија нам говори колико је "РАШИРЕНА" нека расподела.

ДИСПЕРЗИЈА = РАСИПАЊЕ = РАСТУРАЊЕ...

ДЕФ: $E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right) =$

$\vdots$ ← може се показати

$= E(X^2) - [E(X)]^2$

$= D(X)$

ДЕФ: ... $E(X)$ мат. очекивање сл. пр. X, тада је ДИСПЕРЗИЈА (ВАРИЈАНСА) сл. променљиве дата са

$$D(X) = E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

обележава се још и са $Var(D)$

ДИСКРЕТАН СЛУЧАЈ: $D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot p_i$

НЕПРЕКИДНИ СЛУЧАЈ:

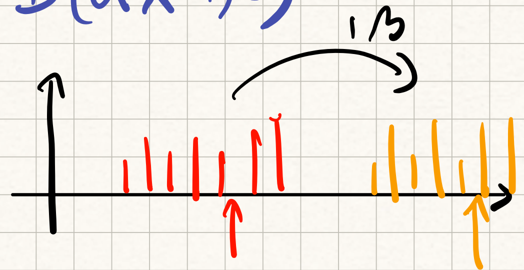
$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-E(X)\right)^2\cdot f(x)\,dx$$

ОСОБИНЕ:

1° $D(X)\geq 0$

2° $D(\alpha\cdot X)=\alpha^2\cdot D(X)$

3° $D(\alpha X+\beta) = D(\alpha X)$



4° $D(\alpha)=0, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

5° X, Y независне сл. величине $\Rightarrow$
$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

6° $D(X)= E(X^2)-[E(X)]^2$

ДЕФ: Квадратни корен дисперзије назива се СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА или СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$