13.05.2026.

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ (НАСТАВАК)

ОСОБИНЕ:

Особине крив. инт. II врсте аналогне су од особинама крив. инт. I врсте уз једну разлику:

6°
$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

!!!

Крив. инт. мења знак ако се промени правац интег.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ

- Нека је крива L задата непр. диф. ф-јом:

$$\boxed{\begin{aligned} &y = y(x) \\ &x \in [a,b] \end{aligned}}$$

Тада:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,\underbrace{dy}_{dy = y'(x)\,dx} = \int_a^b \left[P(x,y) + Q(x,y)\cdot \underline{y'(x)}\right] \underline{dx}$$

- Ако је крива L задата парам. једнама

$$\boxed{\begin{aligned} &x = x(t) \\ &y = y(t) \\ &t \in [\alpha,\beta] \end{aligned}}$$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x,y)\cdot x'(t) + Q(x,y)\,y'(t)\right]dt$$

$$dx = x'(t)\,dt \qquad dy = y'(t)\,dt$$

⊕ ⊖

Ако одр. почетну и крајњу тачку => одредили смо оријентацију криве (од A ка B).

Ако је $A=B$, тада је крива затворена

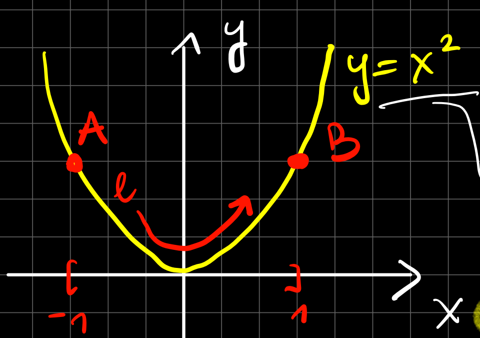
Затворена:

⊕ : супротно од смера казаљке на сату (гледано из коорд. почетка

⊖: у смеру казаљке...

<u>пример</u> 1 Израчунати $I_1 = \int_l (\underbrace{x^2-2xy}_{P(x,y)})\,dx + (\underbrace{y^2-2xy}_{Q(x,y)})\,dy$, $l: y=x^2, -1 \le x \le 1$

l- оријентисана у смеру раста параметра

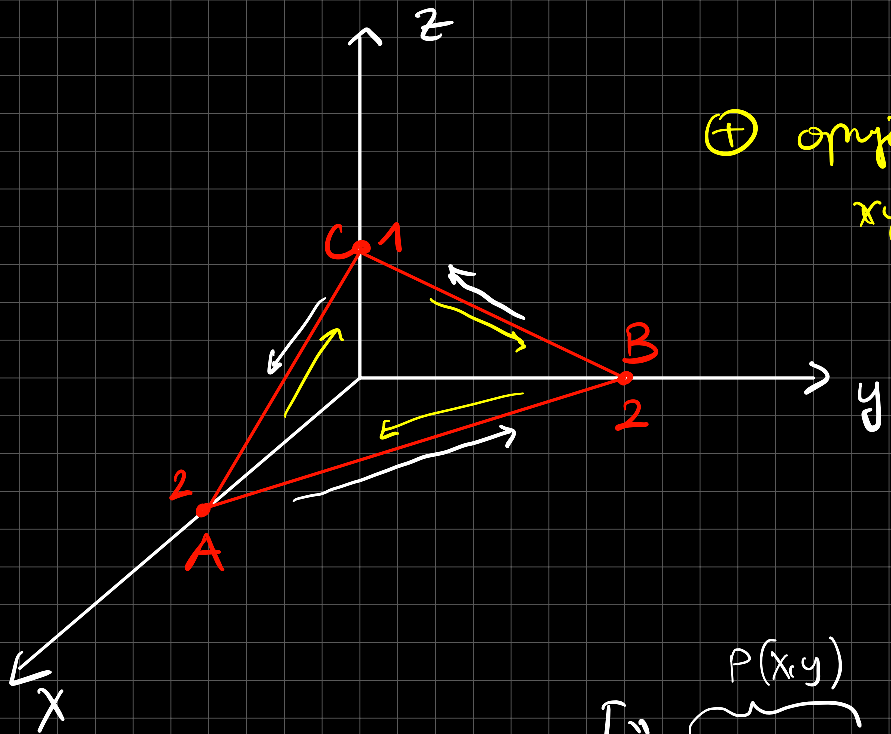


$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(x,y) + Q(x,y)\cdot y'(x)\right]dx$$

$$I = \int_{-1}^{1}\left[(x^2 - 2x\cdot x^2) + (x^4 - \underbrace{2x\cdot x^2}_{x^3})\underbrace{(x^2)'}_{2x}\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)\,dx = \dots = -\frac{14}{15}$$

пример 2 Потребно је одредити позитивну оријентацију контура троугла одређеног .. $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,1)$



⊕ оријентација је означена жутом $\overrightarrow{ACBA}$

пример 3. Израчунати $I = \int\limits_{l} \underbrace{(2a-y)}_{P(x,y)}dx - \underbrace{(a-y)}_{Q(x,y)}dy$, где је l први свод циклоиде $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

крива је задата параметарски

$$\int\limits_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(x,y)\,x'(t) + Q(x,y)\,y'(t)\right]dt$$

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi}\left[\big(2a - a(1-\cos t)\big)\cdot\big(a(t-\sin t)\big)'_t - \big(a - a(1-\cos t)\big)\cdot\big(a(1-\cos t)\big)'_t\right]dt$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\left[(2a - a + a\cdot\cos t)\,a(1-\cos t) - (a - a + a\cos t)\,a\cdot\sin t\right]dt$$

$$= \dots = \pi\cdot a^2$$

ВЕЗА КРИВОЛИНИЈСКОГ ИНТЕГРАЛА ПРВЕ И ДРУГЕ ВРСТЕ

ТЕОРЕМА:

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{AB} \left(P(x,y)\cdot\cos\alpha + Q(x,y)\cdot\sin\alpha \right) dl,$$

где је $\alpha = \alpha(M)$ угао који заклапа тангента на криву у тачки M са позитивним делом x-осе.

У општем случају зависи од пута, али при неким условима зависи само од почетне и крајње тачке...

НЕЗАВИСНОСТ КРИВ. ИНТ. ДРУГЕ ВРСТЕ ОД ПУТА ИНТЕГРАЦИЈЕ

Нека су $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непр. ф-је на затвореној обл. G, и нека су парц. изводи $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непр. унутар обл. G. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1° Интегр. по произвољној ЗАТВОРЕНОЈ кривој l која лежи унутар области G ЈЕДНАК ЈЕ 0

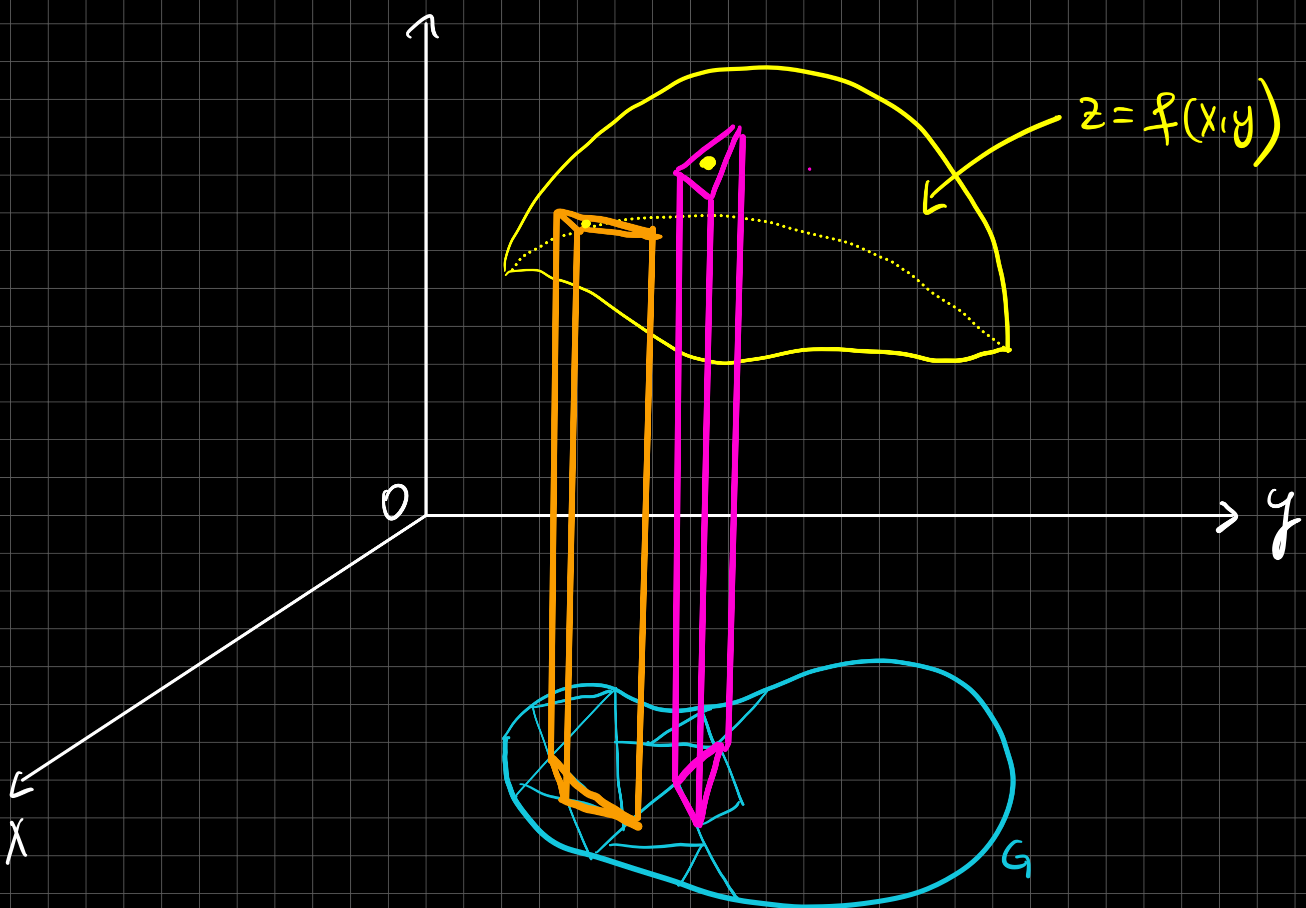
$$\oint_l P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

2° Интеграл по произвољној кривој која спаја тачке A и B унутар области G НЕ ЗАВИСИ ОД ПУТА.

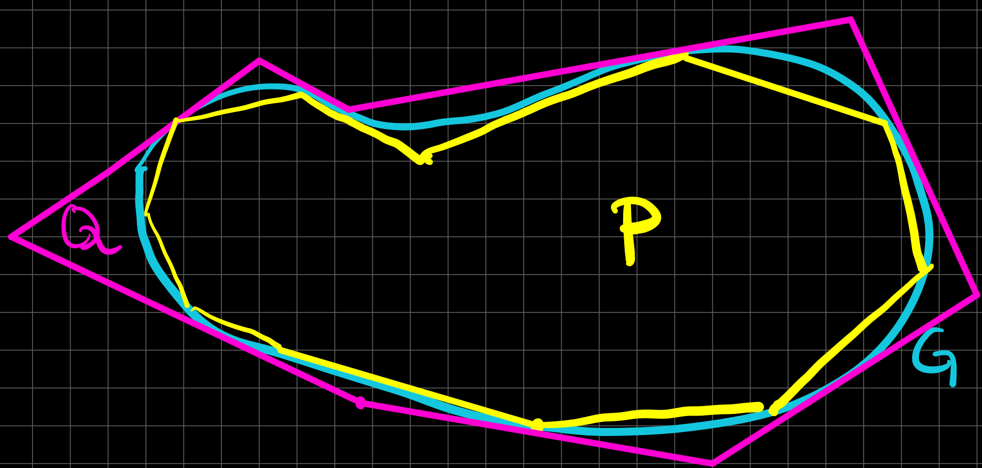
3° Израз $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ представља ДИФЕРЕНЦИЈАЛ неке ф-је $u(x,y)$ дефинисане на области G

4° $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛ



КВАДРАБИЛНА ФИГУРА?



P - област ограничена многоугаоном линијом уписаном у фигуру G

Q - област огр. многоуг. линијом описаном око фигуре

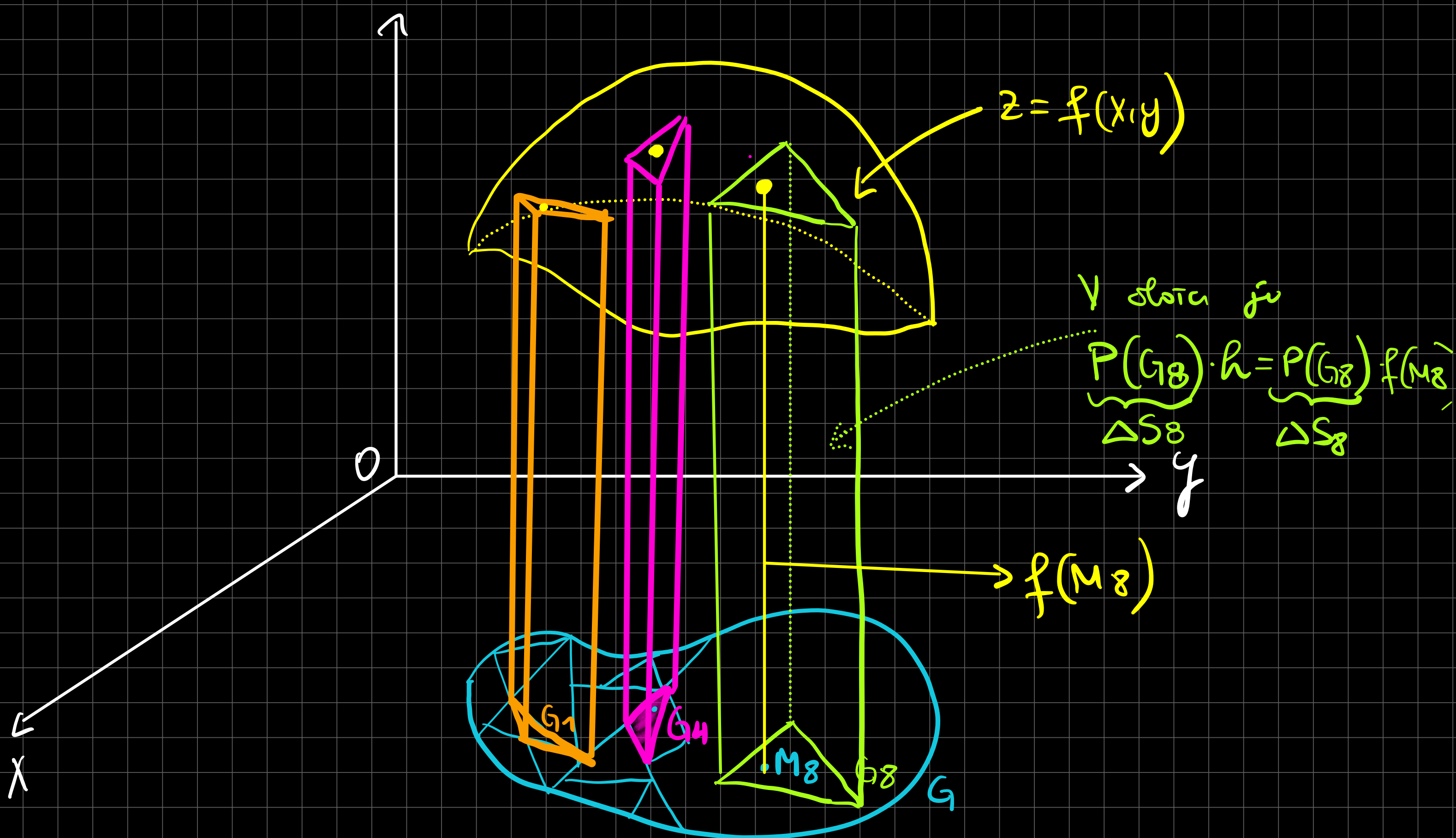
S(P) - површина области P

S(Q) - || - Q

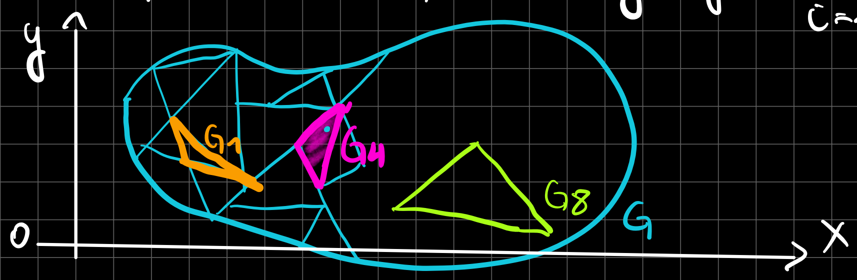
- Означимо са S^* супремум површина области ограничених многоуг. ликом уписаним у обл. G

- Означимо са S_* инфимум површина фигура огр. многоуг. ликом описаним око области G.

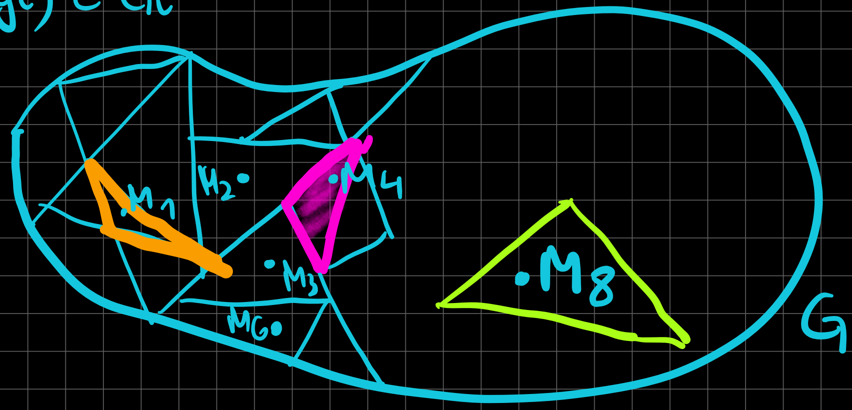
- Уколико $S^* = S_* = S$ онда број S зовемо површином области G и за област G кажемо да је КВАДРАБИЛНА.



- G квадрабилна фигура у равни xOy
- Нека је на тој фигури деф. непр. ф-ја $z=f(x,y)$
- Поделимо фигуру G на n дисјунктних елементарних фигура G_i, $i=1,\dots,n$, тако да је $\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G$



- У свакој подобласти (фигури) G_i изаберемо тачку $M_i(x_i, y_i) \in G_i$



- Посматрамо вредности ф-је z у тим тачкама: $f(x_i, y_i)$
- Како су G_i елем. фигуре тада се њихова P лако рачуна и нека је она $\Rightarrow \Delta S_i = P(G_i)$

- Формирамо ИНТЕГРАЛНУ СУМУ

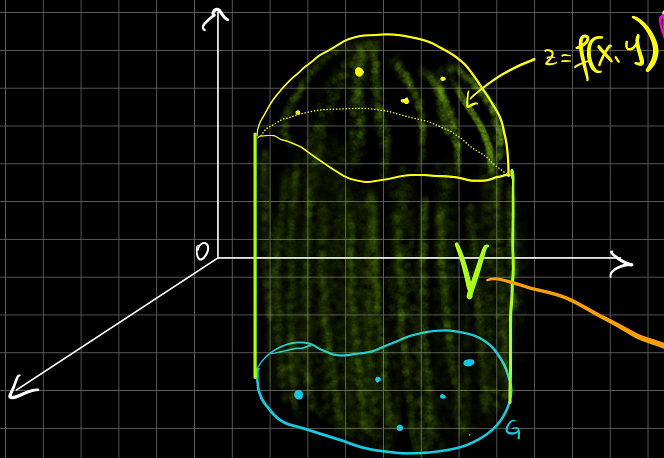
$$G_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$$

представља највеће растојање између 2 тачке из области

- Означимо са d највећи од дијаметара области G_i

ДЕФ: Уколико постоји коначна гр. вредност интеграл. сума G_n када максимални дијаметар области $d \to 0$, која не зависи од поделе области G, нити избора тачака M_i, онда се та гран. вредност зове ДВОСТРУКИ ИНТЕГРАЛ ф-је $f(x,y)$ по области G и означава са:

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

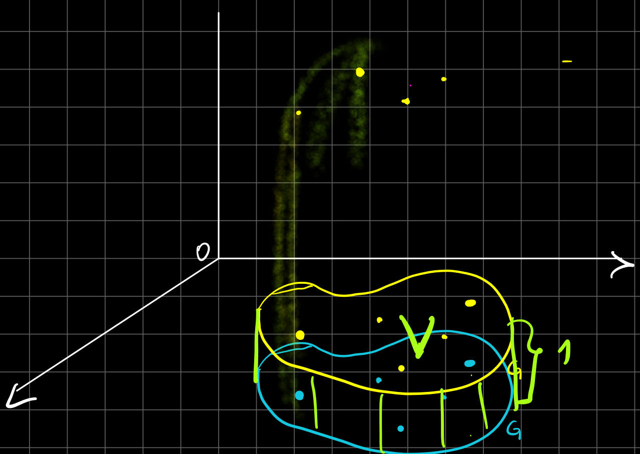


ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА (ПРИМЕНА)

Нека је $f(x,y) \geq 0$ за $\forall x,y \in G$

Двоструки инт. ф-је $f(x,y)$ по области G представља ЗАПРЕМИНУ КРИВОЛИНИЈСКОГ ЦИЛИНДРА ограниченог:

- одоздо са области G
- одозго ГРАФИКОМ ф-је $f(x,y)$
- а са стране одговарајућом цилиндричном површи.



Шта ако је $f(x,y)=1$

V је заправо површина области G

ОСОБИНЕ:

1° Нека су $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегр. ф-је на обл. G. Онда су и њихов збир и разл. такође инт. ф-је на G и важи

АДИТИВНОСТ

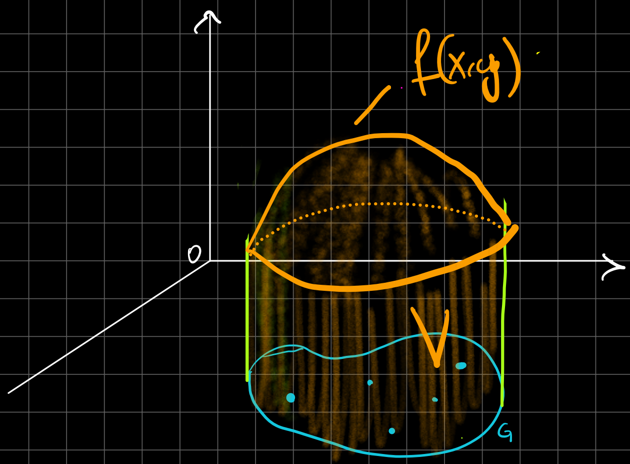
$$\iint_G (f(x,y) \pm g(x,y))\,dx\,dy = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy \pm \iint_G g(x,y)\,dx\,dy$$

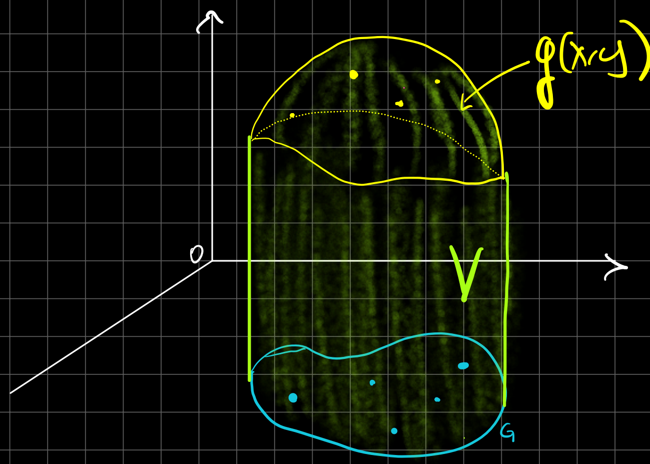
2° Нека је $f(x,y)$ интегр. ф-ја на обл. G, тада је и $k \cdot f(x,y)$ инт. ф-ја на обл. G и важи

$$\iint_G k \cdot f(x,y)\,dx\,dy = k \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

ХОМОГЕНОСТ

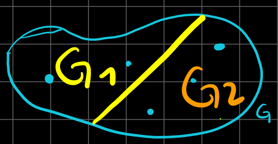
3° Нека су $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегр. ф-је на обл. G.
и нека је $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in G$. Тада важи

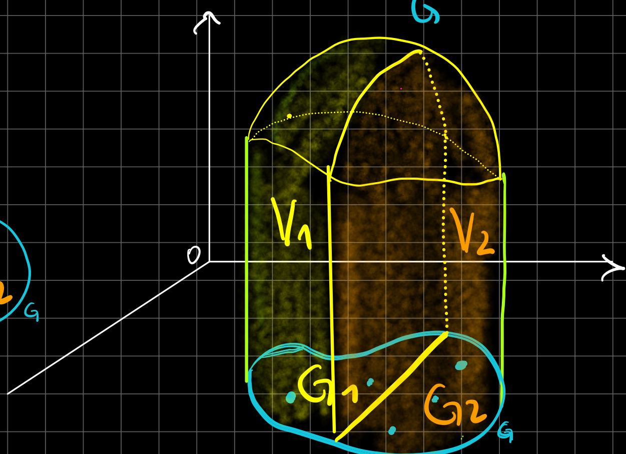




$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_G g(x,y)\,dx\,dy$$

4°





Нека је област G издељена на две дисјунктне области G_1 и G_2, и нека је $f(x,y)$ интегр. на G. Тада је $f(x,y)$ инт. и на G_1 и G_2 и важи:

$$\underbrace{V = V_1 + V_2}$$

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

5° Нека је $f(x,y)$ инт. ф-ја на обл. G. Тада:

$$\left| \iint_G f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_G |f(x,y)|\,dx\,dy$$

КРИТЕРИЈУМ ИНТЕГРАБИЛНОСТИ:

ТЕОР: Довољан услов да двоструки интеграл постоји је да је ф-ја $f(x,y)$ НЕПРЕКИДНА на области G.