06.05.2026.

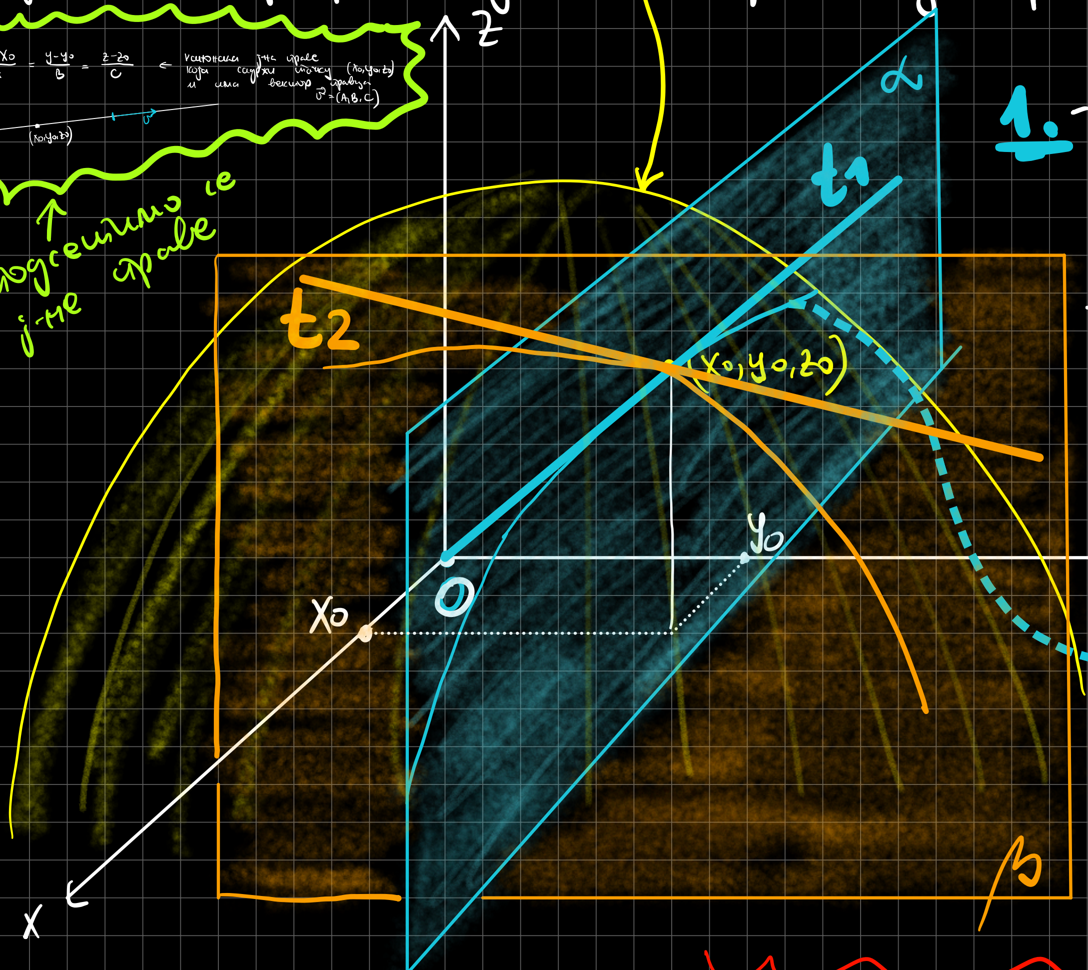
ТАНГЕНТНА РАВАН И НОРМАЛА ПОВРШИ У ПРОСТОРУ

Нека је $z=z(x,y)$ непр. ф-ја на скупу $D \subset \mathbb{R}^2$ и нека је њен график дата површ у простору $\mathbb{R}^3$.

$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$ ← канонска ј-на праве која садржи тачку (x_0,y_0,z_0) и има вектор правца $\vec{v}=(A,B,C)$

(x_0,y_0,z_0) $\vec{v}$

↑ подсетимо се ј-не праве



1. - Нека је раван α дата са $y=y_0$

- Одредимо тангенту t_1 на површ $z=z(x,y)$ тако да $t_1 \in \alpha$

→ пресек површи и α

У 2 димензије како нађи тангенту на криву?

$$y-y_0=y'(x)(x-x_0)$$

t_1?
$$\begin{cases} y=y_0 \\ z-z_0=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0) \end{cases}$$

Ако се запише у канонском облику

$$t_1: \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{z'_x(x_0,y_0)}$$

$\vec{t_1}$ вектор правца

$t_1\ (1,0,z'_x(x_0,y_0))$

2. Нека је раван β дата са $\underline{x=x_0}$

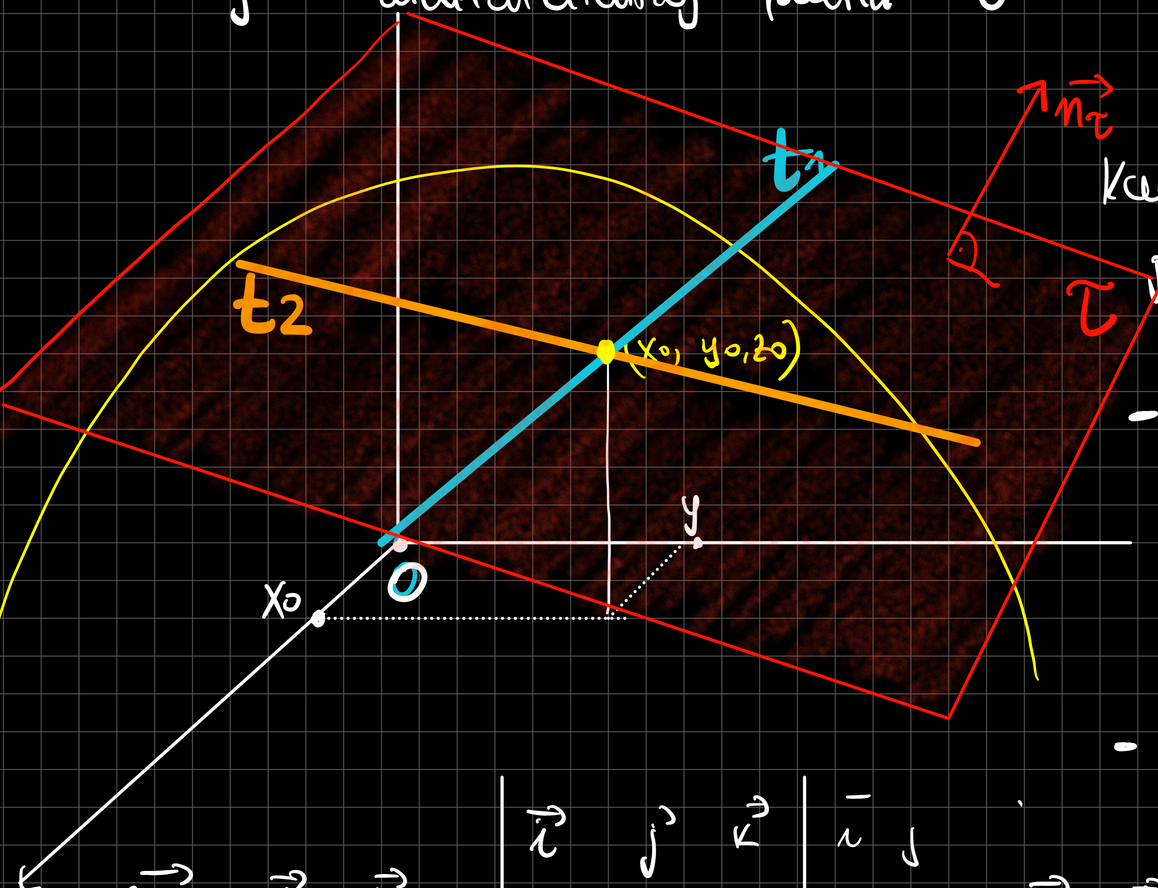
Одредимо тангенту t_2 на површ $z=z(x,y)$ тако да $t_2 \in \beta$.

$$t_2? \quad \begin{cases} x = x_0 \\ z-z_0 = z'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

Канонски облик?

$$t_2: \quad \frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{z'_y(x_0,y_0)} \qquad \vec{t_2}\left(0,\ 1,\ z'_y(x_0,y_0)\right)$$

$\Rightarrow$ Сада имамо 2 праве (t_1, t_2) које се налазе у тангентној равни τ



Како да одредимо ј-ну за τ?

Треба нам

- вектор нормале $\vec{n_\tau}$?

  Нека он буде $\vec{n_\tau} = \vec{t_1} \times \vec{t_2}$

- тачка, нпр (x_0, y_0, z_0)

$$\vec{n_\tau} = \vec{t_1} \times \vec{t_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = \vec{k} - \vec{i} \cdot z'_x(x_0,y_0) - \vec{j}\, z'_y(x_0,y_0)$$

$$= -z'_x(x_0,y_0)\vec{i} - z'_y(x_0,y_0)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n_\tau} = \left(-z'_x(x_0,y_0),\ -z'_y(x_0,y_0),\ 1\right)$$

Боље узети: $\vec{n_\tau}\left(z'_x(x_0,y_0),\ z'_y(x_0,y_0),\ -1\right)$

$$\boxed{z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0}$$

J-НА ТАНГЕНТНЕ РАВНИ ПОВРШИ $z=z(x,y)$ У ТАЧКИ (x_0,y_0,z_0)

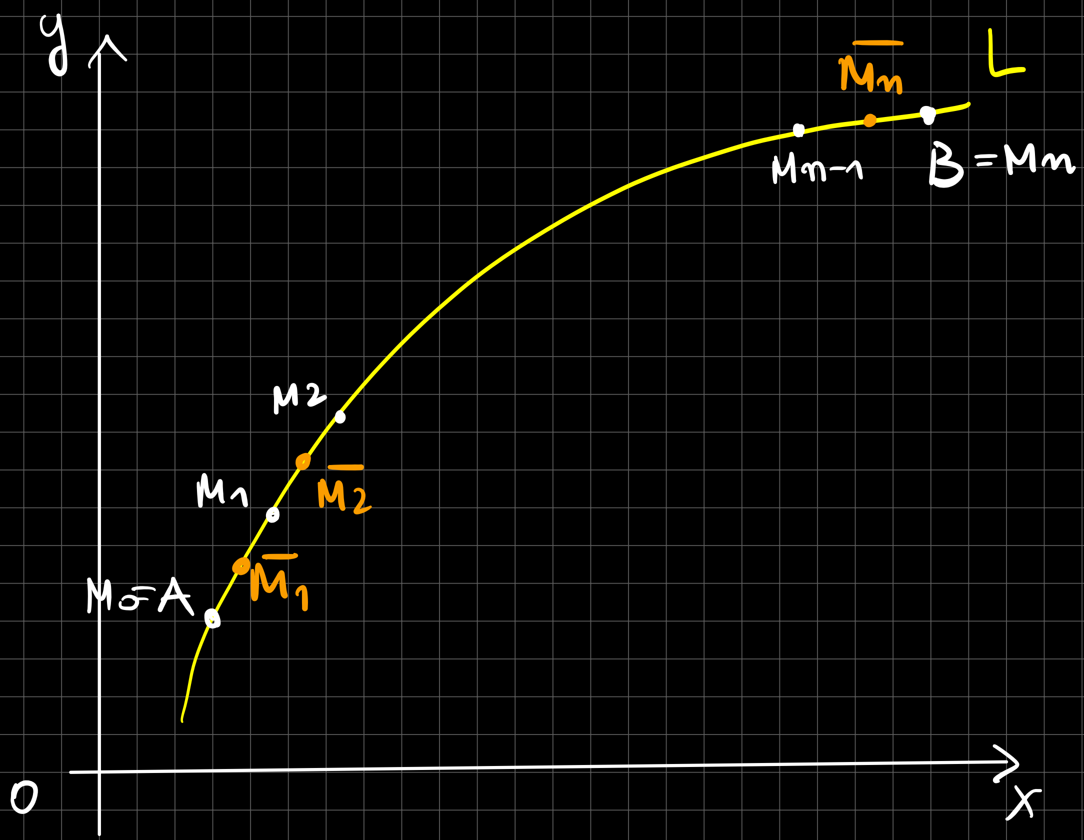
– А како ћемо одредити нормалу површи?

Њен вектор правца је такође $\vec{n_\tau}$, и садржи тачку (x_0,y_0,z_0):

$$\boxed{\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}}$$

J-НА НОРМАЛЕ ПОВРШИ $z=z(x,y)$ У ТАЧКИ (x_0,y_0,z_0)

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ



- Нека је дата глатка крива L
- Нека је у свакој тачки т. криве L=AB у равни Oxy задата непр. ф-ја две променљиве $f(x,y)$

- Поделимо криву L на n делова $A=M_0, M_1, \ldots, B=M_n$
- На свакој делу криве $\overline{M_{i-1}M_i}$ изаберимо тачку $\overline{M_i}(\overline{x_i}, \overline{y_i})$
- Нека је Δl_i дужина лука $\overline{M_{i-1}M_i}$
- Формирамо интегралну суму $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}) \cdot \Delta l_i$
- Ова сума се назива ИНТЕГРАЛНА СУМА ПРВОГ РЕДА за ф-ју $f(x,y)$ задату на кривој L

— Означимо са $d = \max \Delta l_i$

Уколико постоји коначна гранична вредност интегр. сума када $d \to 0$, а таква да не зависи од поделе криве L нити од избора тачака $\overline{M}_i$, онда ту граничну вредност зовемо

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ ф-је $f(x,y)$ по кривој L и означавамо са

$$\int_L f(x,y)\, dl \qquad \text{или} \qquad \int_{AB} f(x,y)\, dl$$

диференц. лука

КРИТЕРИЈУМ ИНТЕГРАБИЛНОСТИ

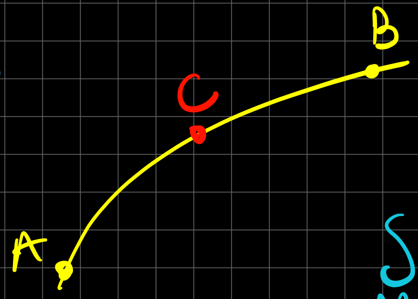
ТЕОРЕМА: Довољан услов да крив. инт. I врсте постоји је да је ф-ја $f(x,y)$ НЕПРЕКИДНА на кривој која спаја A и

ОСОБИНЕ

1° $$\int_{AB} k\cdot f(x,y)\, dl = k\int_{AB} f(x,y)\, dl$$

2° $$\int_{AB} \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\, dl = \int_{AB} f(x,y)\, dl \pm \int_{AB} g(x,y)\, dl$$

3° Ако је $f(x,y)$ интегр. ненегативна ф-ја на кривој која спаја тачке A и B тада: $\int_{AB} f(x,y)\, dl \geq 0$

4° 

Ако је крива која спаја тачке A и B подељена тачком C на два дела AC и CB

$$\int_{AB} f(x,y)\, dl = \int_{AC} f(x,y)\, dl + \int_{CB} f(x,y)\, dl$$

5° Ако је $f(x,y)$ инт. ф-ја на кривој која спаја A и B онда је и $|f(x,y)|$ [illegible] интегр. на кривој која спаја A и B и важи:

$$\left|\int_{AB} f(x,y)\,dl\right| \leq \int_{AB} |f(x,y)|\,dl$$

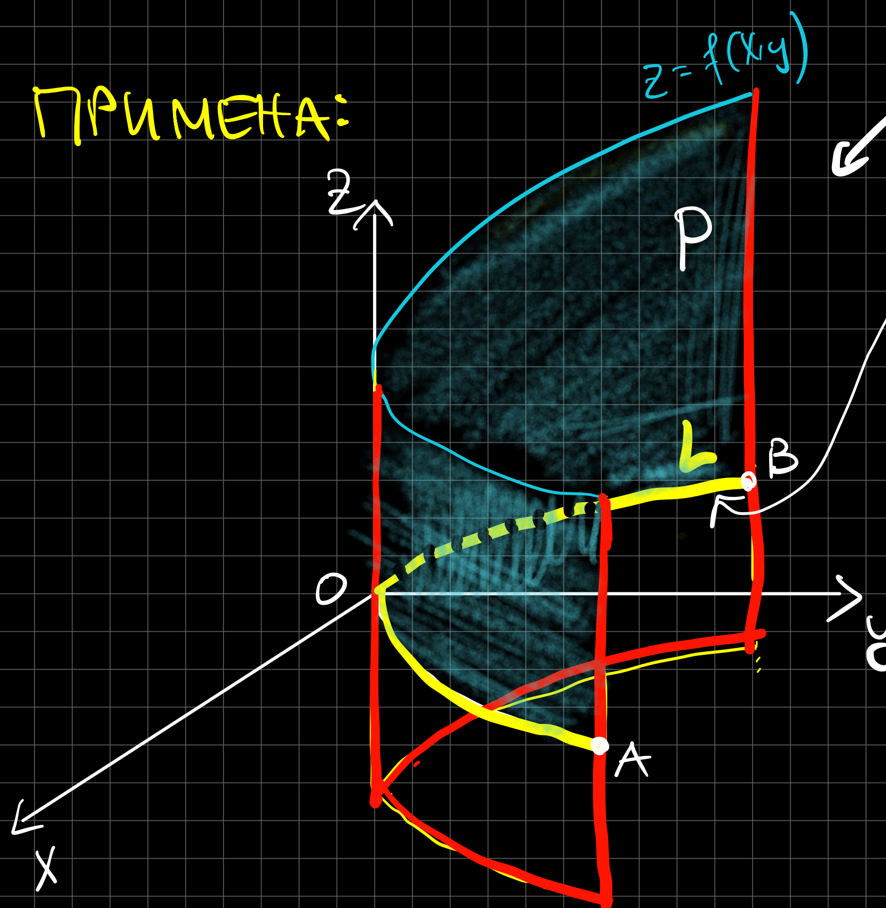
6° !!! Криволинијски инт. I врсте не зависи од правца интеграције

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{BA} f(x,y)\,dl$$

нема минуса!

→ 1° – 5° аналогне особинама одр. интегр.
6° се разликује!

ПРИМЕНА:

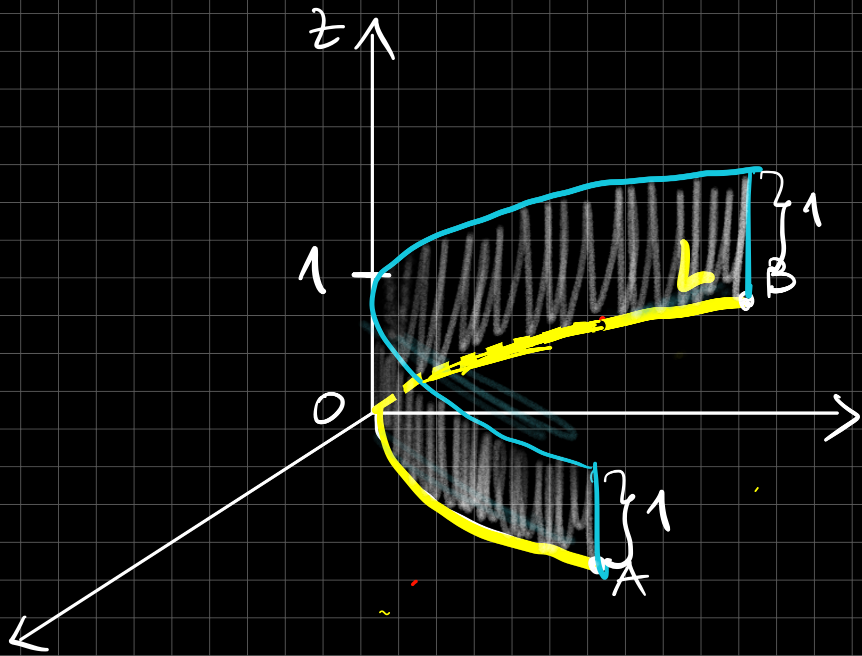


Површина цилиндричне површи која се налази између xOy равни и површи $z=f(x,y)$

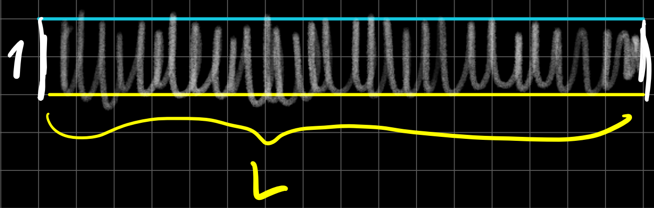
$$\int_{AB} f(x,y)\,dl$$

Шта ако је $z=f(x,y)$ јако једноставно? Нпр.

$z = f(x,y) = 1$



$\Rightarrow$ развучимо га?



$P = ?$ $\quad P = L \cdot 1 =$ дужина лука!

$\Rightarrow \int f(x,y)\,dl \Rightarrow \int dl$ даје дужину лука!

стално $f=1$

У физици често користимо масу лука криве

$$m = \int_{AB} \rho(x,y)\,dl$$

густина

ИЗРАЧУНАВАЊЕ:

- Нека је крива L задата непрекидно диференцијабилном ф-јом $y=y(x),\ x\in[a,b]$. Тада:

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

овде ће се појављивати само x

$\int_L dl \to$ дужина лука $\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx}$$

- Нека је крива L задата параметарски једн.

$x=x(t)$

$y=y(t)$

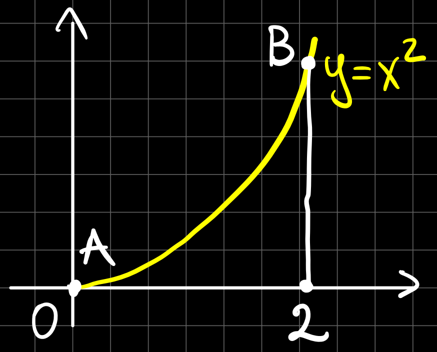
$t\in[\alpha,\beta]$

$$\int_L f(x,y)\,dl$$

$$\int_L dl = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}$$

пример



Израчунати $\int_{AB} \underbrace{(x+y)}_{f(x,y)}\,dl$

Крива је задата са $y=y(x)=x^2$

Одакле докле се креће x? $x\in[0,2]$

$$\int_{AB}(x+y)\,dl=\int_0^2 (x+x^2)\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\dots$$

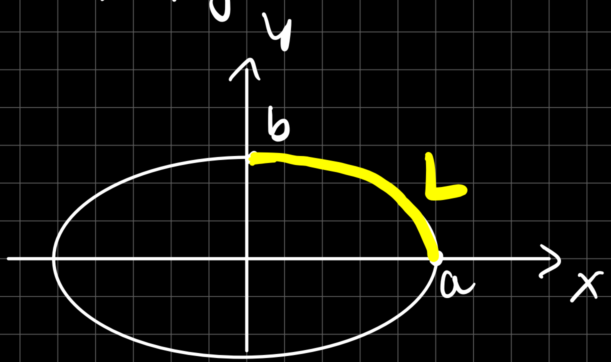
где год је y мењамо са x^2

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,dl=\int_a^b \underbrace{f(x,y(x))}_{x+x^2}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx}$$

y'? $(x^2)'=2x$

пример 2

Израчунати $\int_L xy\,dl$, ако је $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x\geq 0,\ y\geq 0$.



Једноставније је изразити елипсу парам.:

$x=a\cdot\cos t$

$y=b\cdot\sin t$

$t\in[0,\pi/2]$

$$\boxed{\int_L \underbrace{f(x,y)}_{x\cdot y}\,dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}$$

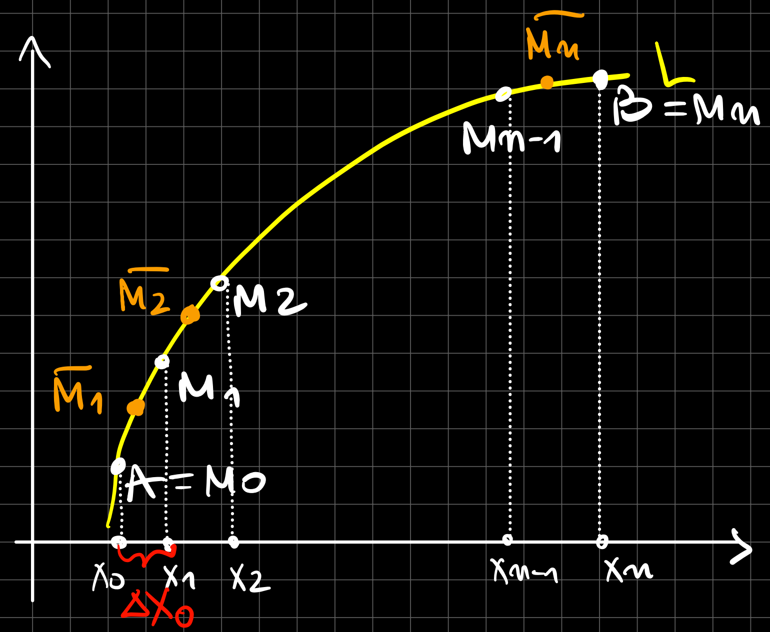
$(b\sin t)'=b\cos t$

$(a\cdot\cos t)'=-a\sin t$

$$\int_L xy\,dl = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\sin t \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\,dt = \ldots$$

одређени интеграл по t...

КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ



- Нека је $L=AB$ глатка крива која спаја тачке A и B
- Нека је дата непр. ф-ја $P(x,y)$ дефинисана у тачкама криве L
- Поделимо криву на n делова тачкама $A=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n=B$
- На сваком делу криве $\overline{M_{i-1}M_i}$ изаберимо тачку $\overline{M_i}$

ознаке: $M_i(x_i,y_i)$, $\overline{M_i}(\overline{x_i},\overline{y_i})$...

- Нека је $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ← РАЗЛИКА У ОДНОСУ НА КРИВ I ВРСТЕ! (радимо пројекцију!)

- Формирамо интегралну суму $S_{n,x}=\sum_{i=1}^{n} P(\overline{x_i},\overline{y_i})\cdot\Delta x_i$

Добијена сума се назива ИНТЕГРАЛНОМ СУМОМ ДРУГОГ РЕДА за ф-ју $P(x,y)$ по координати x.

- Означимо $d=\max \Delta x_i$ (макс. дужина одсечка на x-оси)

Уколико постоји коначна гр. вредност интегралних сума када $d \to 0$, која не зависи од поделе криве L нити од избора тачака $\overline{M_i}$, онда ту гр. вредност називамо КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТ. II ВРСТЕ ПО КООРДИНАТИ X ф-је $P(x,y)$ и означавамо са:

$$\int_L P(x,y)\,dx$$

друга ф-ја!

– Потпуно аналогно се деф. КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ ф-је $Q(x,y)$ по КООРДИНАТИ Y који се означава са $\int_L Q(x,y)\,dy$, где је $Q(x,y)$ непр. ф-ја

ДЕФИНИЦИЈА: Збир крив. интеграла $\int_L P(x,y)\,dx$ и $\int_L Q(x,y)\,dy$ се назива КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ и означава се са: $\int_L \underbrace{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}_{\text{све под интегралом}}$