ПОЈАМ СЛУЧАЈНОГ ДОГАЂАЈА. АЛГЕБРА СЛУЧАЈНОГ ДОГАЂАЈА.

АКСИОМАТСКА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ.

Под **случајним експериментом** ћемо подразумевати експеримент чији се исход не може са сигурношћу предвидети и који се може поновити неограничен број пута (под истим условима, разуме се).

У вези са уоченим случајним експериментом говоримо о **случајним догађајима**.

За догађај који у датом случајном експерименту може или да се деси или да се не деси, и при том нема никакву трећу могућност, рећи ћемо да је случајан.

Често ћемо случајне догађаје називати само догађајима. У (случајне) догађаје сврставамо и **сигуран** и **немогућ догађај**.

Сигуран називамо догађај који у сваком извођењу уоченог случајног експеримента обавезно наступа, а немогућим догађај који у том експерименту не може да се оствари.

Догађаје ћемо означавати великим словима латинице: $A, B, C, ...$, а по потреби ћемо их индексирати. Немогућ догађај означава се симболом $\emptyset$, а за сигуран догађај резервисана је ознака Ω.

У скупу свих случајних догађаја везаних за дати случајни експеримент увешћемо неке релације и неке операције и на тај начин ћемо изградити такозвану алгебру догађаја.

Дефиниција 1. Нека су A и B неки случајни догађаји. Ако се при сваком остваривању догађаја A остварује и догађај B, тада кажемо да догађај A **повлачи (имплицира)** догађај B, или да догађај B **садржи (обухвата)** догађај A, и бележимо то са: $A \subset B$.

Дефиниција 2. За догађај ($\neq \emptyset$) који не садржи ниједан други догађај кажемо да је **елементаран** догађај. За догађај који није елементаран кажемо да је **сложен**.

Сваки случајан догађај различит од немогућег састоји се од једног или више елементарних догађаја. Често се случајан догађај Ω, који се састоји од свих елементарних догађаја у датом случајном експерименту, назива **скупом елементарних догађаја**.

Дефиниција 3. Ако за случајне догађаје A и B важи $A \subset B$ и $B \subset A$, тада кажемо да су догађаји A и B једнаки и пишемо: $A = B$.

Горња дефиниција се може формулисати и као: догађаји A и B су једнаки ако и само ако се један од њих остварује тачно онда када се остварује други.

Дефиниција 4. Догађај који се остварује тачно онда када се догађај А не остварује назива се **супротним** за догађај А и означава се са A^C или $\bar{A}$.

Дефиниција 5. Под **производом (пресеком)** догађаја A и B подразумевамо догађај који се остварује тачно онда када се остваре оба догађаја A и B истовремено. Означавамо га са $A \cap B$ или AB.

Дефиниција 6. За случајне догађаје кажемо да су **несагласни** или да се међусобно **искључују**, ако је $AB{=}\emptyset$, или, што је исто, ако не могу да се остваре истовремено.

Дефиниција 7. Нека су A и B неки случајни догађаји. **Унијом** догађаја A и B називамо догађај који се остварује тачно онда када се оствари бар један од догађаја A и B, и обележавамо га са $A \cup B$. Ако је $AB{=}\emptyset$, унију догађаја називамо и **збиром** и користимо ознаку $A + B$.

Пошто случајне догађаје дефинишемо као скупове елементарних догађаја, из дефиниција 1, 4, 5 и 7 видимо да релацију импликације, као и операције комплемента, пресека и уније дефинишемо аналогно одговарајућим дефиницијама за скупове.

Фамилија (класа) догађаја $\mathcal{F}$ са особинама

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$;
3. $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, ... \Rightarrow \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{F}$

назива се $\sigma-$пољем, а функција $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ са особинама:

1. $(\forall A \in \mathcal{F})\ P(A) \geqslant 0$ (ненегативност);
2. $P(\Omega) = 1$ (нормираност);
3. $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, ...$ и $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j \Rightarrow P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (пребројива адитивност)

назива се вероватноћом случајног догађаја A.

Следеће особине су последице наведених својстава $\sigma-$поља $\mathcal{F}$ и вероватноће P:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ (коначна адитивност);
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
5. $(\forall A \in \mathcal{F})\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. $AB = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ако изводимо неки експеримент, тада је скуп свих могућих елементарних исхода овог експеримента скуп елементарних догађаја Ω.

Задаци:

1. Нека су A, B и C три произвољна догађаја везана за неки експеримент. Дефинисати догађаје:
а) реализовао се само догађај A; $(A\bar{B}\bar{C})$
б) реализовали су се и догађај A и догађај B; (AB)
в) реализовала су се бар два од ових догађаја; $(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC)$
г) реализовала су се не више од два од ових догађаја; $(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C})$
д) није се реализовао ниједан догађај; $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$
ђ) бар један; $(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC)$
е) само један. $(A + B + C)$

2. На три машине прави се исти производ. Са $A_k, k = 1, 2, 3$, означавамо догађај да производ направљен на k-тој машини одговара стандарду. Шта значе догађаји:
а) $A_1A_2A_3$; (сва три производа одговарају стандарду)
б) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; (бар један производ одговара стандарду)
в) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$; (само један производ одговара стандарду)
г) $A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$; (само један производ НЕ одговара стандарду или два одговарају)
д) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; (ниједан производ не одговара стандарду)
ђ) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 - A_1A_2A_3$? (бар један, а највише два производа одговарају стандарду).

Домаћи: Експеримент се састоји од три гађања у мету. Елементарни догађаји су сви могући исходи овог експеримента, A_i - погађање мете код i-тог гађања, $i = 1, 2, 3$, $A_i\prime$ - промашај мете код $i-$тог гађања, $i = 1, 2, 3$. Дефинисати догађај:
а) резултат ова три гађања су три поготка;
б) бар један погодак;
в) бар један промашај;
г) не више од једног поготка;

д) до трећег гађања није било поготка.

3. Нека суA и B случајни догађаји и нека је $P(A)=0,5$, $P(B)=0,3$ и $P(A\cap B)=0,1$. Израчунати вероватноће: а) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$, б) $P(\overline{A}\cap B)$ и в) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Решење:

а) Из Де Мораганових формула је $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$, па је $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})$, односно $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cap B)$.

Дато је $P(A\cap B)=0,1$. Зато је: $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-0,1=0,9$.

б) Како је $AB\cap\bar{A}B=B$, $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$, следи да се $P(\overline{A}\cap B)$ рачуна као: $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$, па је

$P(\overline{A}\cap B)=0,3-0,1=0,2$.

в) Из ДеМоргановиx формула добијамо да је $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$.

Даље, важи да је $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,5+0,3-0,1=0,7$, одакле следи $P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-0,7=0,3$.

КОМБИНАТОРИКА

комбинације без понављања

Формула по којој се рачунају комбинације без понављања:

$$C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Особине биномних коефицијената:
(i) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$;
(ii) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$;
(iii) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$.

Задаци:

1. Од 5 студената из Београда, 4 из Новог Сада и 3 из Ниша направити групу такву да у њој буду 3 из Београда, 2 из Новог Сада и 1 из Ниша. На колико начина се то може урадити?

$\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}=10\cdot6\cdot3=180$.

2. На колико различитих начина можемо изабрати 5 карата из шпила од 52 карте тако да међу изабраним буде:

а) тачно 2 кеца;

$\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}$;

б) бар 2 кеца;

$\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{3}+\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{1}$.

в) највише 2 кеца.

3. На колико различитих начина се може изабрати 8 карата из шпила од 52 карте тако да међу изабраним буде:

а) тачно 2 седмице и 3 кеца;

$\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{3}$;

б) тачно 2 седмице и бар 3 кеца;

$\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{44}{2}$.