22.04.2026.

ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ВИШЕГ РЕДА

$$z''_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad z''_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

парц. извод по x
од парц. извода z по x

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \qquad z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

први извод је по x,
а онда по y

мешовити парц. изводи II реда

пример $\quad z = x^2 + 2xy + y^3$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (x^2+2xy+y^3)'_x = 2x + 2y$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2+2xy+y^3)'_y = 2x + 3y^2$$

$$z''_x = (2x+2y)'_x = 2$$

$$z''_{xy} = (2x+2y)'_y = 2$$

$$z''_y = (2x+3y^2)'_y = 6y$$

$$z''_{yx} = (2x+3y^2)'_x = 2$$

једнаки!

ТЕОРЕМА: .. $z=f(x,y)$ има парц.изводе I и II реда, ... ако су мешовити парц. изв. II реда непр.
$\Rightarrow$ ЈЕДНАКИ.

ТОТАЛНИ ПРИРАШТАЈ: $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

Подсетимо се деф из мат 1

ДЕФ: За ф-ју $f: D \to \mathbb{R}$ ... ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА у x_0 ако се њен прираштај Δy може предст. у облику

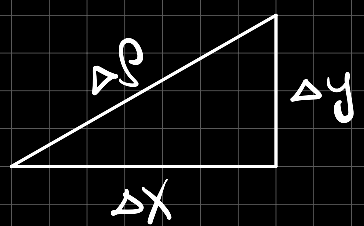
$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где је A реалан број, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

ДЕФ: .. $z = f(x,y)$ је ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА у $M_0(x_0,y_0)$ ако се њен прираштај може представити у облику

$$\Delta z = \underbrace{P \cdot \Delta x + Q \cdot \Delta y}_{\text{ГЛАВНИ ДЕО ПРИРАШТАЈА}} + \varepsilon \cdot \Delta\rho,$$

где је $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, где $\varepsilon \to 0$ када $\Delta\rho \to 0$.



ТЕОРЕМА: Ако је ф-ја $z = f(x,y)$ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА у $M_0(x_0,y_0)$ онда је:

$$P = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

ТЕОРЕМА: Ако су парц. изводи I реда $z = f(x,y)$ деф. у околини тачке $M_0(x_0,y_0)$ и НЕПРЕКИДНИ у M_0, онда је ф-ја $z = f(x,y)$ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА у M_0.

ДЕФ: Главни део прираштаја ф-је $z = f(x,y)$ у $M_0(x_0,y_0)$ назива се ДИФЕРЕНЦИЈАЛ Ф-ЈЕ $z = f(x,y)$ у $M_0(x_0,y_0)$ и означава са $dz(x_0,y_0)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

пример. Одредити дифер. ф-је $z=x^3-y^2-2x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^3-y^2-2x^2y^3\right)'_x=3x^2-4xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(x^3-y^2-2x^2y^3\right)'_y=-2y-6x^2y^2$$

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y=\left(3x^2-4xy^3\right)\Delta x+\left(-2y-6x^2y^2\right)\cdot\Delta y$$

ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОД СЛОЖЕНЕ ФУНКЦИЈЕ

Нека је дата ф-ја $z=f(u,v)$ две реалне променљиве, а нека су u и v дате ф-је две реалне пром. $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. На овај начин је деф. сложена ф-ја z и њен парц. извод одр. по ф-ли:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

<u>пример:</u> Одредити $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ ф-је $z(u,v)=u^2-2u\cdot e^v$, где је $u(x,y)=x^2y-2xy$, а $v(x,y)=\sin(x+y)$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=?\qquad\frac{\partial z}{\partial v}=?$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(u^2-2u\cdot e^v\right)'_u=2u-2e^v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(u^2-2ue^v\right)'_v=-2ue^v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^2y-2xy\right)'_x=2xy-2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\sin(x+y)\right)'_x=\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2u - 2e^v)(2xy - 2y) + (-2ue^v)\cdot\cos(x+y)\ldots$$

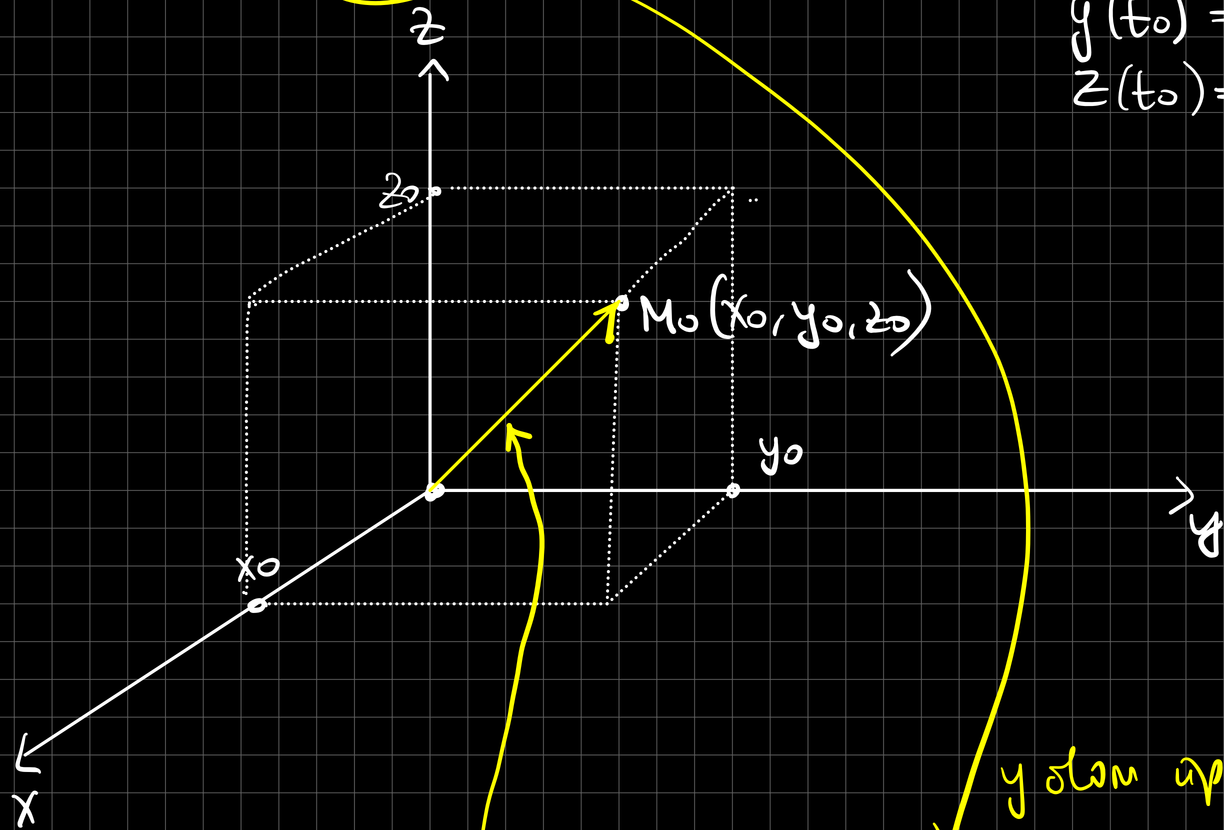
КРИВА У ПРОСТОРУ

Нека су $x(t), y(t)$ и $z(t)$ дате реалне ф-је које пресликавају скуп $D \subset \mathbb{R}$ у скуп $\mathbb{R}$

$$\underset{t\in}{x}: D \to \mathbb{R}$$

Нека је $t_0 \in D$, и нека важе

$x(t_0) = x_0$
$y(t_0) = y_0$
$z(t_0) = z_0$



у овом примеру t_0

ДЕФ: Уколико се сваком реалном броју из скупа D придружи тачно један вектор, тада кажемо да је на скупу D деф. ВЕКТОР Ф-ЈА скаларне пр.

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in D \subset \mathbb{R}$$

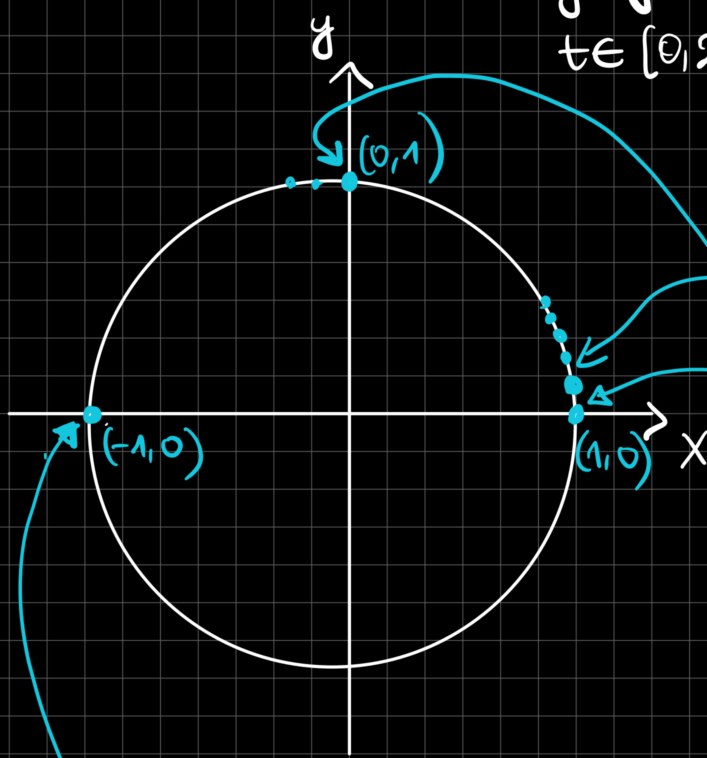
ДЕФ: $x(t), y(t), z(t)$ непр. ф-је деф на $D \subset \mathbb{R}$.
Скуп свих тачака у простору које представљају КРАЈЕВЕ ВЕКТОРА $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$ назива се **КРИВА У ПРОСТОРУ.**

ЈЕДНАЧИНЕ КРИВЕ:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t \in D \end{array}\right\} \text{ ПАРАМЕТАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРИВЕ}$$

<u>пример</u>: у равни!

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) = \cos t \\ y = y(t) = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{array}\right\} \text{ ПАРАМЕТАРСКА Ј-НА КРУГА}$$



t пролази кроз интервал
Шта се дешава?

$t=0$: $x = \cos 0 = 1$
$y = \sin 0 = 0$
$(x,y) = (1,0)$

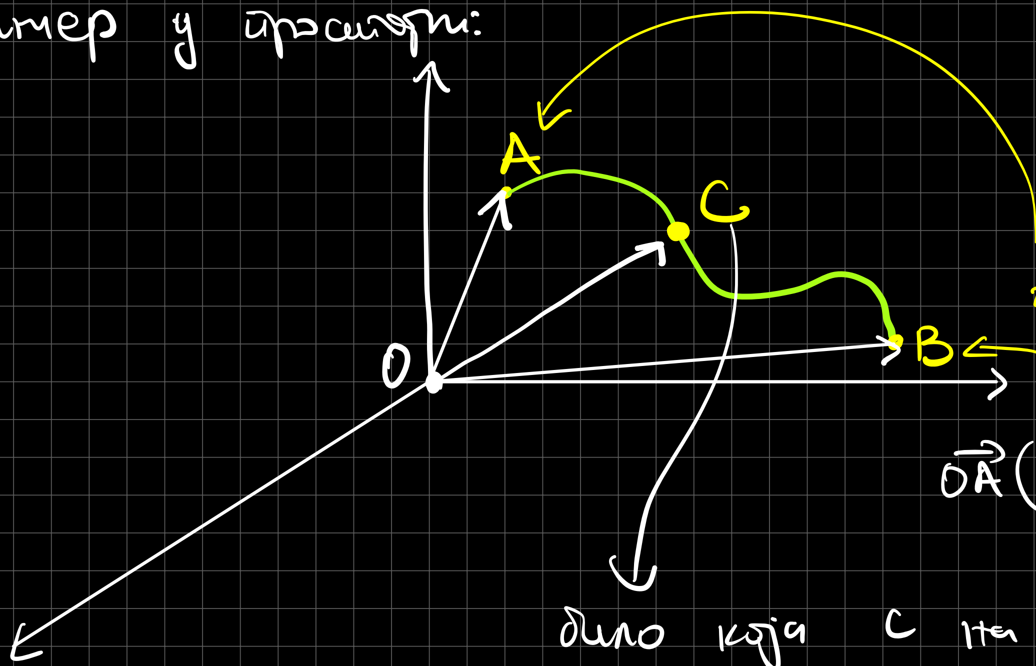
$t = 0,1$: $x = \cos(0,1) = 0,995$
$y = \sin(0,1) = 0,09$
$(x,y) = (0,995\ ,\ 0,9)$

⋮

$t = \pi/2$: $x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
$y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$(x,y) = (0,1)$

$t = \pi$: $x = \cos\pi = -1$
$y = \sin\pi = 0$
$(x,y) = (-1,0)$

пример у простору:



$t \in [\alpha, \beta]$

води до почетне тачке

$A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$

$B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$

$\vec{OA}(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$

било која C на криви се добија $C = C(x(t), y(t), z(t))$

t смо узели из интервала $[\alpha, \beta]$

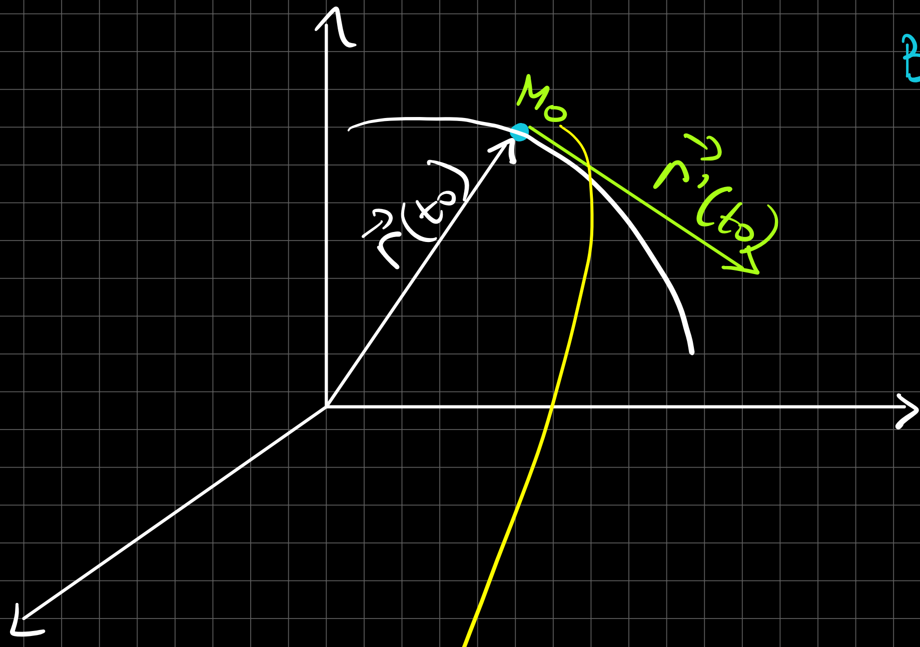
ДЕФ: Нека је $\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0$, $\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0$, $\lim_{t \to t_0} z(t) = z_0$.

Тада кажемо да је вектор $r_0(x_0, y_0, z_0)$ ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ вектор ф-је $r(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$ када $t \to t_0$ и пишемо

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$$

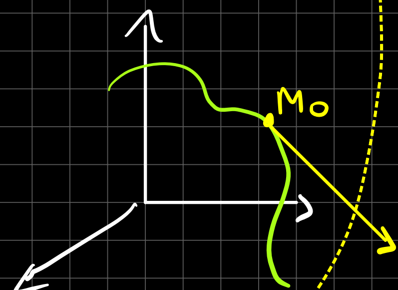
ДЕФ: Нека су $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ диференцијабилне ф-је на скупу $D \subset \mathbb{R}$. ИЗВОД ВЕКТОР Ф-ЈЕ $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$ у тачки $t_0 \in D$ је вектор:

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0) \vec{i} + y'(t_0) \vec{j} + z'(t_0) \cdot \vec{k}$$



Вектор $\vec{r}'(t_0)$ је вектор чији је правац одр. тангентом на криву у $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

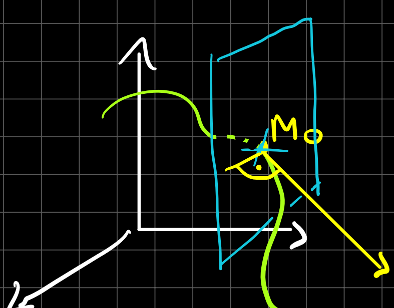
ТАНГЕНТА ГРАФИКА КРИВЕ



Праве дате једначинама:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

назива се ТАНГЕНТА ГРАФИКА КРИВЕ у тачки $(\underbrace{x(t_0)}_{x_0}, \underbrace{y(t_0)}_{y_0}, \underbrace{z(t_0)}_{z_0})$ која је задата ј-нама $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (тј. параметарски)



НОРМАЛНА РАВАН НА КРИВУ

Једначина

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0$$

представља ј-ну НОРМАЛНЕ РАВНИ НА КРИВУ у тачки $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

ДУЖИНА КРИВЕ У ПРОСТОРУ

Подсетимо се случаја у 2 димензије:

Ф-ЛА ЗА ДУЖИНУ ЛУКА КРИВЕ $f(x)$ на $[a,b]$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

тада смо ф-ју задали са $y=f(x)$.

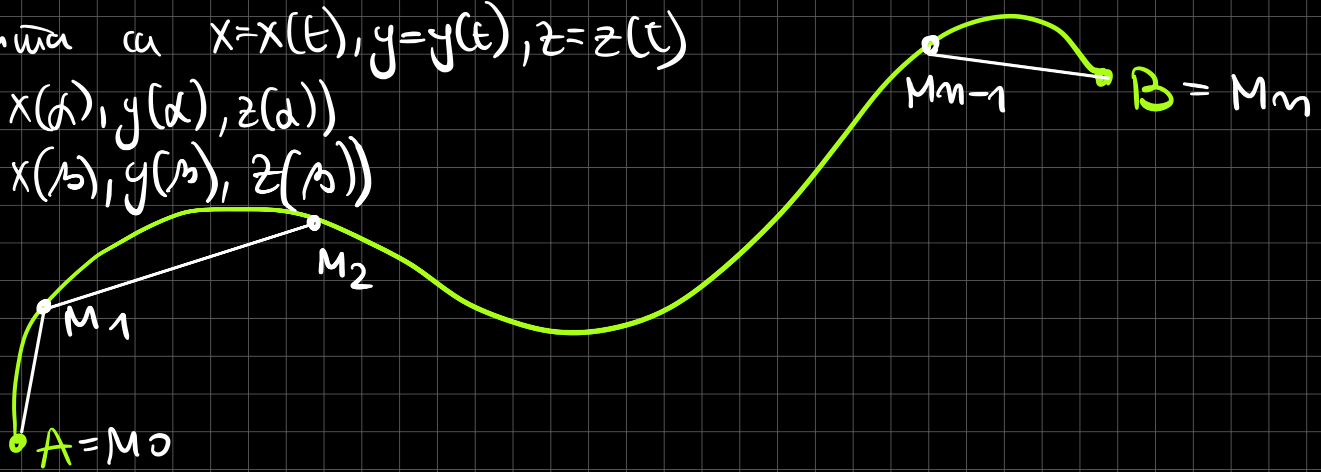
Да смо је задали параметарски $x(t), y(t)$ добили би смо ф-лу: $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

Сада, у 3 димензије радимо са старим ф-лама па добијамо сличну ф-лу.

Ако је $t \in [\alpha, \beta]$, крива је задата са $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$

$A=(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$

$B=(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$



$s(\widehat{AB})$ – дужина изломљене линије која спаја тачке A и B

$$s(\widehat{AB}) = \sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2+(z_i-z_{i-1})^2}$$

$M_i(x_i, y_i, z_i) = M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$

ДЕФ: Уколико постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{\max \Delta t_i \to 0} s(\widehat{AB})$, онда се та гранична вредност зове **ДУЖИНА КРИВЕ** која спаја A и B, а за такву криву кажемо да је **ИСПРАВЉИВА**.

ТЕОРЕМА: Уколико је крива деф. вектор фјом чије су координатне ф-је непрекидне заједно са првим изводом, онда је та крива исправљива и њена дужина је једнака:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

доказ:

$$s(\widehat{AB}) = \sum_{i=1}^{n} d(M_{i-1}, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} = (*)$$

$$\begin{array}{cc} x_i - & x_{i-1} \\ \downarrow & \downarrow \\ x(t_i) & x(t_{i-1}) \end{array}$$

$\exists c \in [t_{i-1}, t_i]$

Лагранжева теорема каже

$$\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\underbrace{t_i - t_{i-1}}_{\Delta t_i}} = x'(c)$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c), \text{ за } c \in \quad \exists c \in [a, b]$$

одатле $\quad x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c) \cdot \Delta t_i$

Лагр. теорему примењујемо на све три ф-је $x(t), y(t), z(t)$

$$\Rightarrow \quad \exists c \in [t_{i-1}, t_i]: \quad y(t_i)-y(t_{i-1}) = y'(c)\cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \quad \exists c \in [t_{i-1}, t_i]: \quad z(t_i)-z(t_{i-1}) = z'(c)\Delta t_i$$

Ово нису исти c-ови, за сваки интервал и сваку ф-ју ће бити различите константе!

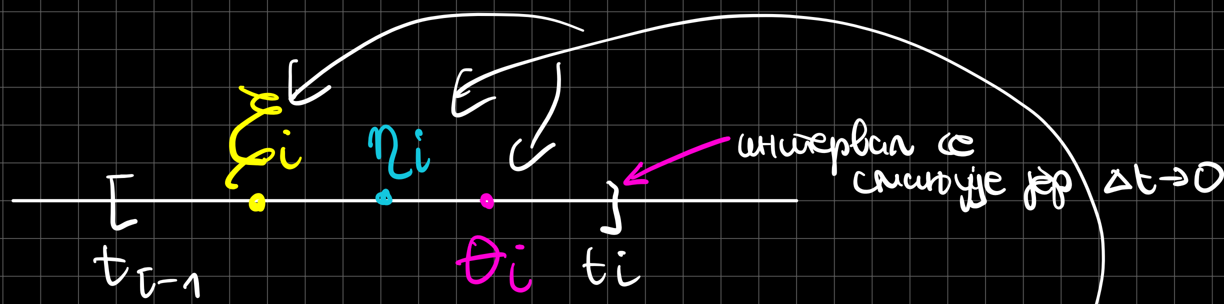
Нпр.

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\cdot \Delta t_i$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\theta_i)\cdot \Delta t_i$$
$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\eta_i)\Delta t_i$$

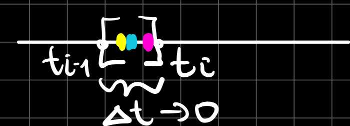
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\xi_i)]^2(\Delta t_i)^2 + [y'(\theta_i)]^2(\Delta t_i)^2 + [z'(\eta_i)]^2(\Delta t_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\theta_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$



Пошто су $x(t), y(t), z(t)$ непр. заједно са I изводом, када $\max \Delta t_i \to 0$, можемо узети да је одговарајућа тачка ИСТА за све 3 ф-је (јер се интервал смањио, и тачке су се „стопиле" у једну).



$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{[x'(\theta_i)]^2 + [y'(\theta_i)]^2 + [z'(\theta_i)]^2}}_{\text{за одр. ф-ју}} \cdot \Delta t_i$$

Риманова интегрална сума

$\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$

за ф-ју $\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$