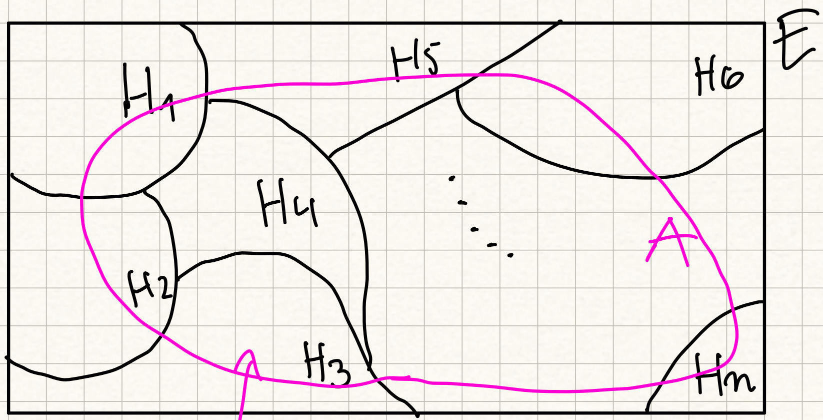
ТОТАЛНА ВЕРОВАТНОЋА И БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

20.04.2026.

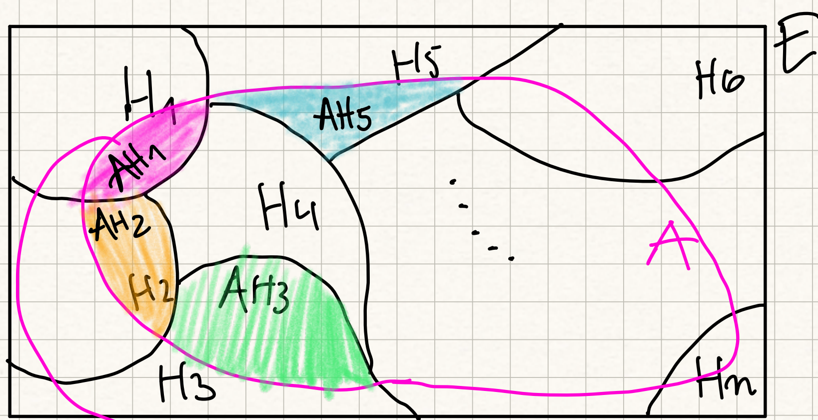


дог. A се реал. уз реал. бар. једног догађаја H.

За уз. искљ. дог. $H_1, H_2, \dots, H_n$ .. потпун систем хипотеза у односу на догађај A, ако је

$$A \subset H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ је једно разлагање скупа E



$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup AH_3 \cup AH_4 \cup \dots \cup AH_n$$

може се пр. а3)

$$P(A) = P(AH_1 \cup AH_2 \cup \dots \cup AH_n) =$$

$$= P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3) + \dots + P(AH_n)$$

Ова условне вероватноће:

$$P(A \mid H_1) = \frac{P(AH_1)}{P(H_1)} \Rightarrow P(AH_1) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)$$

слично $P(AH_2)=P(H_2)\cdot P(A|H_2)$

$$\vdots$$

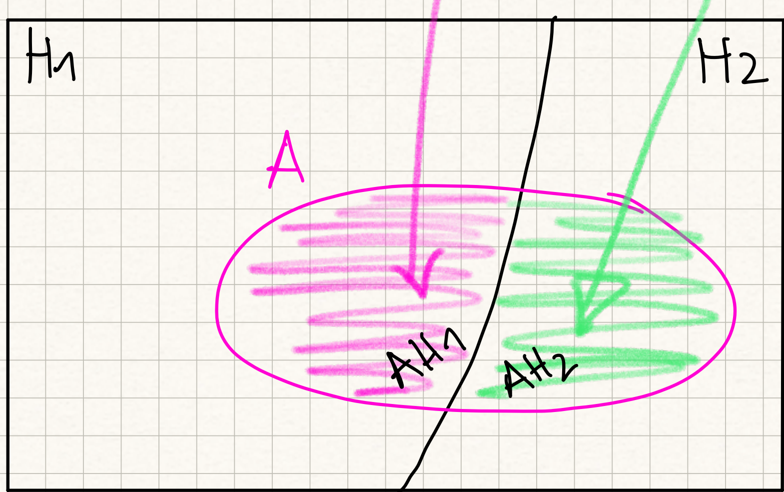
$$P(AH_n)=P(H_n)P(A|H_n)$$

$$\Rightarrow P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A|H_n)$$

ФОРМУЛА ТОТАЛНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

H_i – хипотезе

Primer 1: na ispitu je 60% studenata koji ispit polažu prvi put. Verovatnoća da položi onaj ko izlazi prvi put je 0.3, dok je za ostale verovatnoća 0.4. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti ispit.



E ← студенти који полажу испит

H_1 – изабран је студент који полаже први пут

H_2 – изабран је студент који не полаже први пут

$P(H_1)=0{,}6$

$P(H_2)=0{,}4$

колика је p да студент положи ако полаже први пут

A – изабрани студент је положио испит

$p(A)=?$

$$P(A)=P(H_1)\cdot\overbrace{P(A|H_1)}^{0{,}3}+P(H_2)\cdot\overbrace{P(A|H_2)}^{0{,}4}=$$

$$=0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}4\cdot 0{,}4$$

$$=0{,}34$$

Primer 2: Imamo 4 kutije. U prvoj su 2 bele i 3 crne, a drugoj 1 bela i 1 crna, i trećoj su 3 bele i 5 crnih, a u četrvtoj su 4 bele i 7 crnih. Verovatnoća da se izabere prva kutija je 1/5, druga 1/10, a treća 3/10.

a) nadji verovatnoću da izvučemo belu kuglicu.

b) naći verovatnoću da izvučemo crnu

K_1	K_2	K_3	K_4
2B	1B	3B	4B
3C	1C	5C	7C
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

a) K_i – куглицу извлачимо из i-те кутије

$$P(K_4) = 1 - P(K_1) - P(K_2) - P(K_3) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

A = "извукли смо белу куглицу"

$$P(A) = \underbrace{P(K_1)}_{\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{P(A|K_1)}_{\frac{2}{2+3}} + \underbrace{P(K_2)}_{\frac{1}{10}} \cdot \underbrace{P(A|K_2)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(K_3)}_{\frac{3}{10}} \cdot \underbrace{P(A|K_3)}_{\frac{3}{3+5}} + \underbrace{P(K_4)}_{\frac{2}{5}} \cdot \underbrace{P(A|K_4)}_{\frac{4}{4+7}}$$

$= \dots$?

б) $\bar{A}$ = "извукли смо црну"

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \dots$$

Условна вероватноћа се може искористити за израч. ВЕРОВАТНОЋЕ ХИПОТЕЗЕ ПОСЛЕ ОБАВЉЕНОГ ЕКСПЕРИМ, при коме смо добили нове информације.

Нека $H_1, H_2, \dots, H_n$ чине потпун систем хипот. и нека за $\forall i$, $i \in \{1,2,\dots n\}$ важи $P(H_i) \neq 0$. Тада важи

$$P(H_i \mid A) = \frac{\overbrace{P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}^{P(AH_i)}}{P(A)}, \quad i = 1,2,\dots,n$$

БАЈЕСОВА ФОРМУЛА

$P(H_i)$ – АПРИОРИ вероватноћа (вероватноћа пре извођења експ)

$P(H_i \mid A)$ – АПОСТЕРИОРИ вер.

Нова вероватноћа хипотезе H_i ПОСЛЕ извођења експеримента у ком се оствари догађај A.

пример: "Ако смо извукли белу куглицу, која је вер. да је она извучена из друге кутије?"

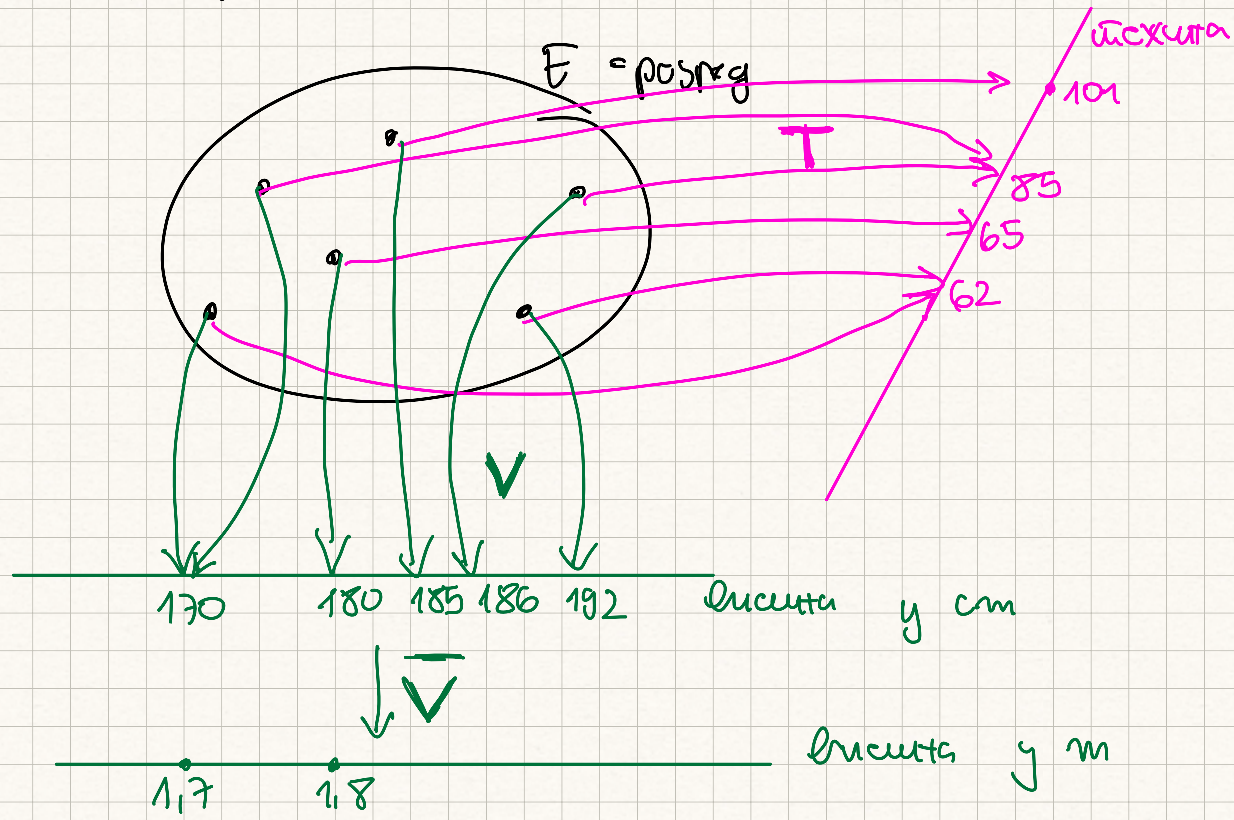
$$P(K_2 \mid A) = ?$$

"Ако је студент положио испит, која је P да је учио пре испит?"

$$P(H_1 \mid A) = ?$$

СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

придружујемо бројеве сваком могућем исходу



ДЕФ: Ф-ја која пресликава скуп свих мог. исхода експер. у скуп реалних бр. назива се СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА (ВЕЛИЧИНА)

$$X : E \to \mathbb{R}$$

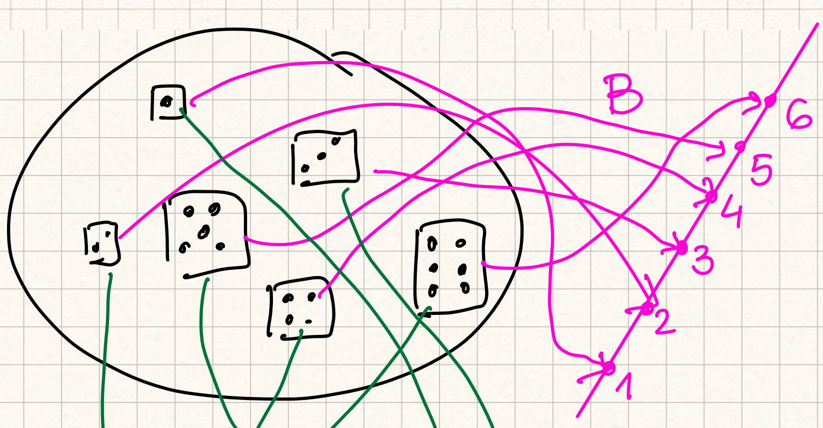
$$X(e) = x$$

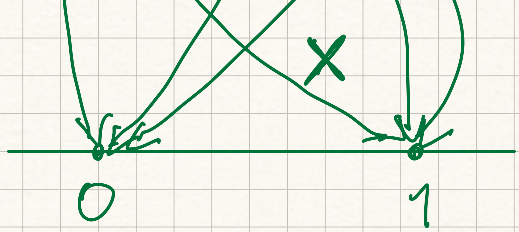
НОТАЦИЈА:

X - случајна величина функција

x - нумеричка вредност, број $\in \mathbb{R}$

Primer: bacamo kocku i možemo definisati slučajnu promenljivu *X* koja je jednaka 0 ako je pao paran broj, a jednaka 1 ako je neparan.





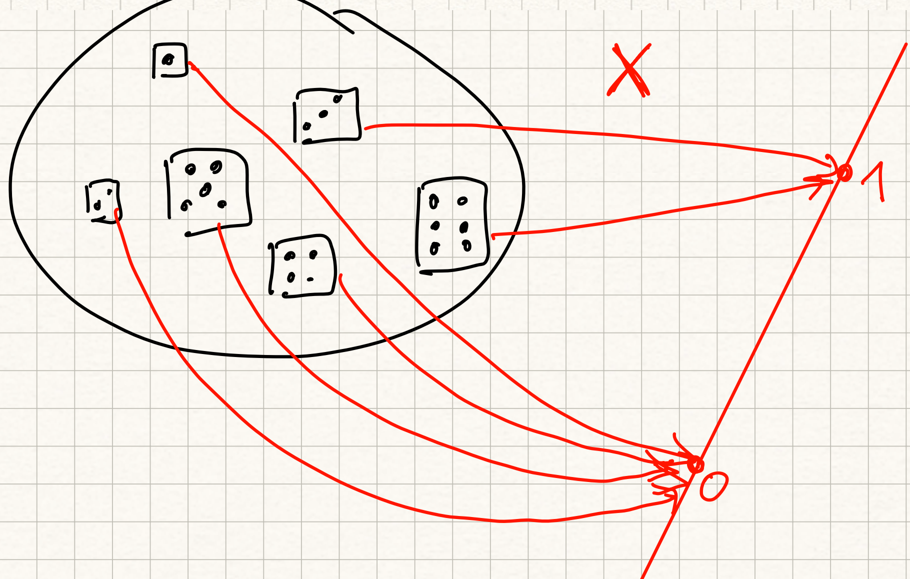
– Ако је скуп свих могућих вредности случ. променљиве X КОНАЧАН (дискретан, пребројив) $\Rightarrow$ ДИСКРЕТНОМ

– У супротном је НЕПРЕКИДНА

↑ висина, тежина,...

! Питали смо се која је вероватноћа да сл. вел. узме неку вредност?

Primer:bacamo kockicu. Neka je X slučajna veličina koje je jednaka 1 ako je broj deljiv sa 3,a 0 u suprotnom.



$$\underset{p_X(1)}{P(X=1)} = 2 \cdot \frac{1}{6}$$

← Нашли смо све исходе који се сликају у 1 и сабрали њихове вероватноће

$$\underset{p_X(0)}{P(X=0)} = 4 \cdot \frac{1}{6}$$

Формално, случајној величини можемо придружити вероватноћу:

$p_X(2)$

$$p_X(x) = P(X=x) = P(\{e \in E \mid X(e) = x\})$$

ово је ф-ја која описује РАСПОДЕЛА ВЕРОВАТНОЋА.

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

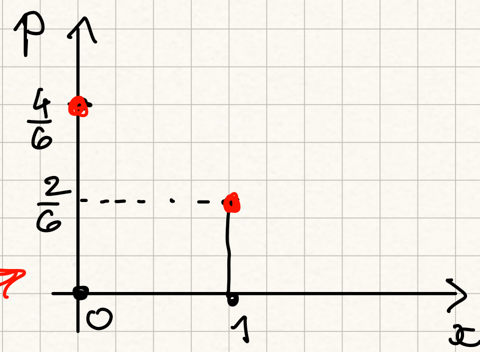
← све могуће вредности које X може да узме

← њихове вероватноће

$\sum$ мора бити $=1$

можемо писати и овако →

X	0	1
p(X)	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$



ДЕФ: Нека сл. величина X узима вредн. $x_1, x_2, \dots, x_n$ са вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, при чему $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Скуп парова (x_i, p_i) где је $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ чини РАСПОДЕЛУ ВЕРОВАТНОЋА сл. пр. X или ЗАКОН РАСПОДЕЛЕ ДИСКРЕТНЕ сл. величине X.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

ОСОБИНЕ:

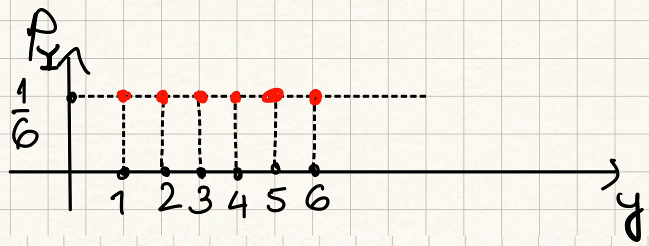
1° $p_X(x) \geq 0$

2° $\sum p_X(x) = 1$ → или $\sum_i P(X = x_i) = \sum_i p_i = 1$

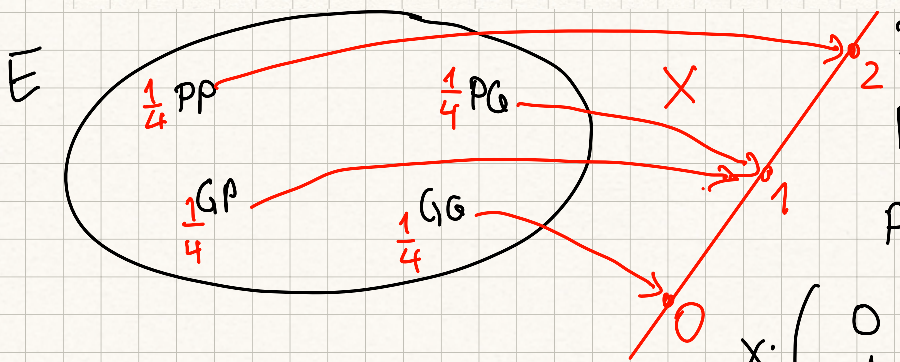
ово нам говори да ће се неко x сигурно догодити

Primer: kocka se baca 1x, a rezultat se opisuje slučajnom veličinom Y.

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$



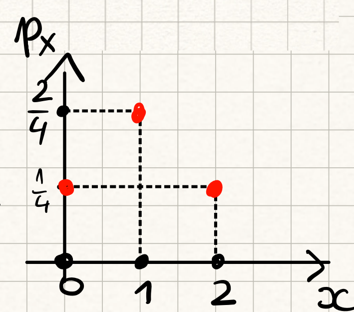
Primer: bacamo novčić 2x. Neka X predstavlja slučajnu promenljivu koja broji koliko je palo pisama.



$P(X=0)=\frac{1}{4}$

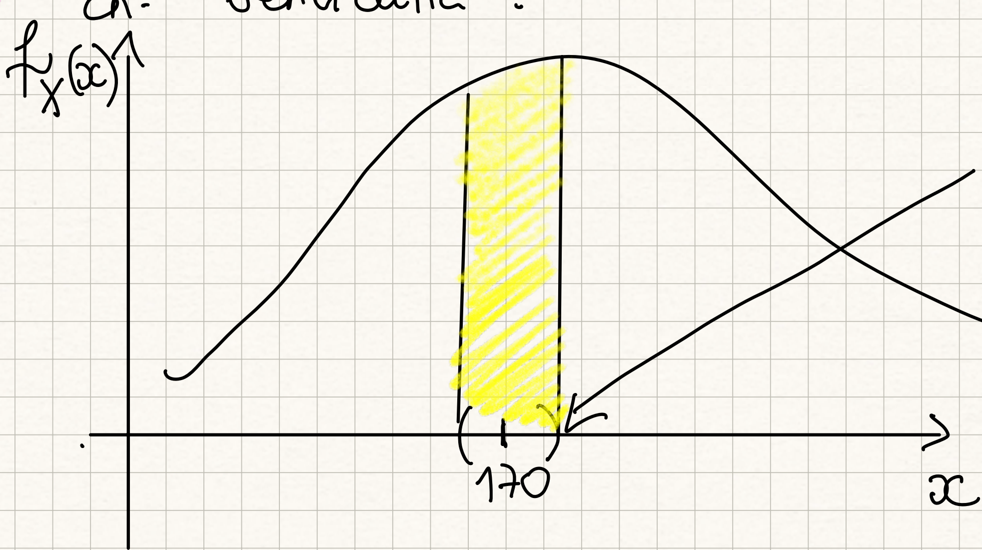
$P(X=1)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)\ \frac{1}{4}$



$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

! Шта је са вероватноћама код непрекидних сл. величина?

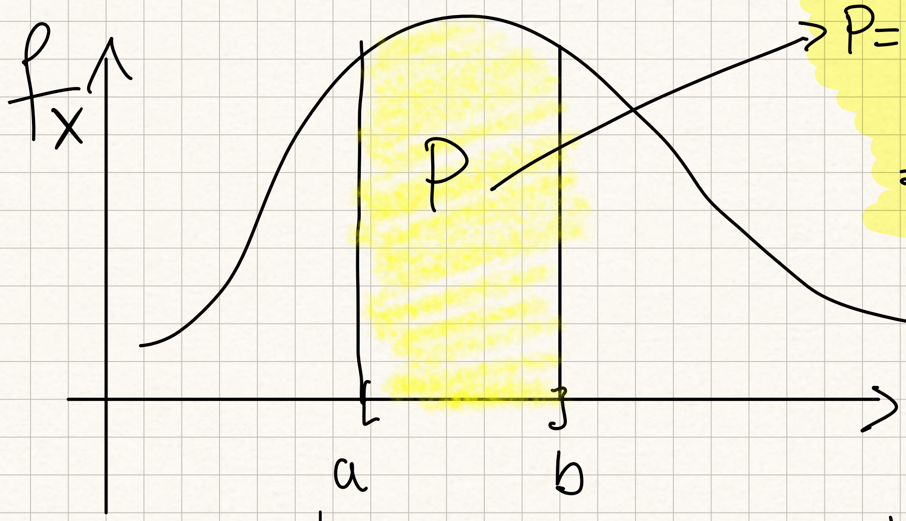


не питамо се више која је p да је неко висок ТАЧНО 170, него „да припада у интервал око 170"

ДЕФ: Ф-ја која одређује вероватноћу да се вредности сл. променљиве нађе у неком интервалу, а задовољава услове: 1° $f_X(x)\geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$,

назива се Ф-ЈА ГУСТИНЕ ВЕРОВАТНОЋА.



$$P=\int_a^b f_X(x)\,dx = P(a\le X\le b)$$

за ф-ју густине

У пракси често пишемо f уместо f_X, али је важно запамтити да је у писању „мало f" јер ћемо велико F користити за ф-ју расподеле

f – функција густине вероватноће

F – функција расподеле (тек ћемо је увести)