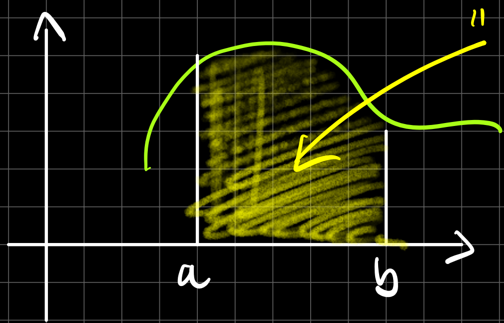
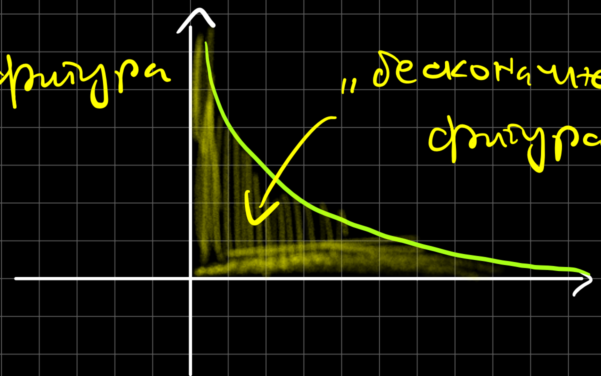
НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

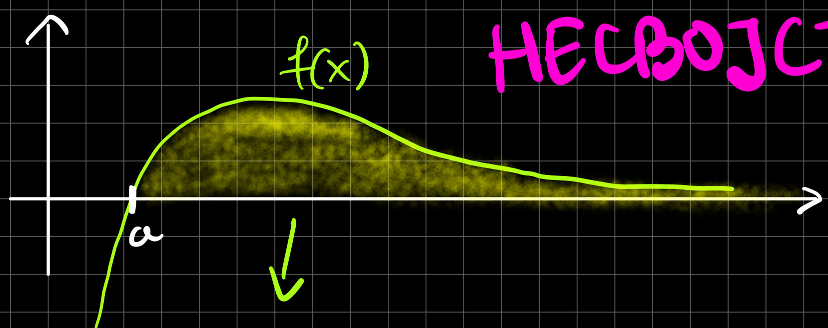
Инт. којима смо се до сада бавили су увек били на КОНАЧНИМ интервалима $[a,b]$ и имали смо ОГРАНИЧЕНЕ ф-је



"Коначна" фигура



„бесконачна" фигура



НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ I ВРСТЕ

ДЕФ: Нека је $f(x)$ интеграб. на сваком сегменту $[a,b] \subset [a,+\infty)$ ... постоји $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, тада...

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ ПРВЕ ВРСТЕ и:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad [a,\infty) \quad 1^\circ$$

пример

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{-0}\right) = 1 \longrightarrow \text{лимес постоји!}$$

$\frac{1}{e^b} \to 0$, $e^b \to \infty$; $e^{-0} \to 1$

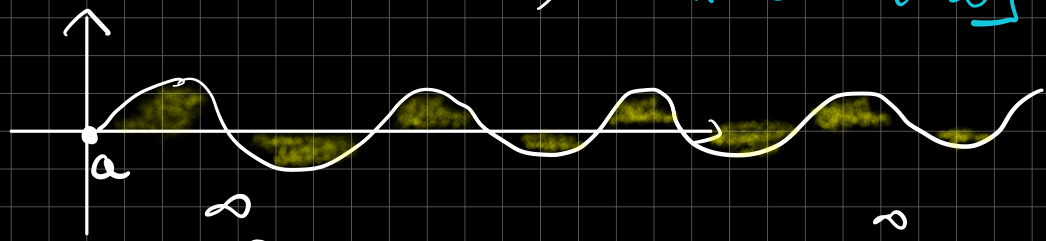
↓

интеграл **КОНВЕРГИРА**

Ако лимес постоји $\Rightarrow$ несвојс. инт. ПОСТОЈИ, тј. интеграл КОНВЕРГИРА.

Ако лимес НЕ ПОСТОЈИ или је БЕСК. $\Rightarrow$ интегр. ДИВЕРГИРА.

пример $\int_0^\infty \sin 3x\,dx =$ $\left[\begin{array}{l} t=3x \\ dt=3dx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\infty \Rightarrow t=\infty \end{array}\right]$



није формалан запис!

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t\Big|_0^\infty = -\frac{1}{3}(\cos\infty - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}(\cos b - \cos 0) =$$

није одређено за $b\to\infty$

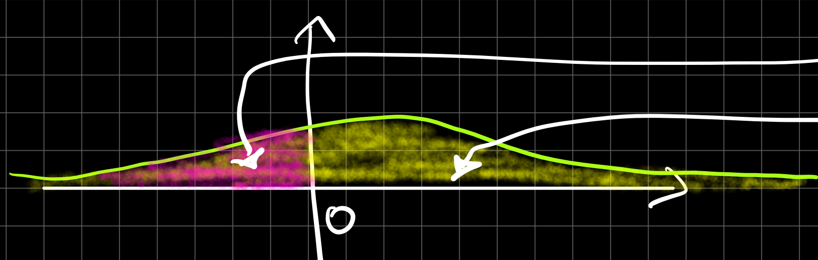
1

$\Rightarrow$ интеграл ДИВЕРГИРА

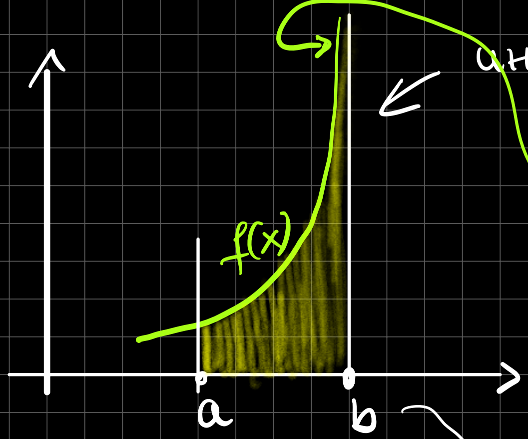
слично

2° $(-\infty, a]$: $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,dx$

3° $(-\infty, \infty)$: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$



НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ II ВРСТЕ



интервал $[a,b]$ је КОНАЧАН!
али је ф-ја НЕОГРАНИЧЕНА у некој тачки

ДЕФ: Нека је $f(x)$ инт. на сваком сегм. $[a,c] \subset [a,b]$ и нека је ф-ја $f(x)$ НЕОГРАНИЧЕНА у околини тачке b ... посматрамо граничну вредност

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

... НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ ф-је $f(x)$

приближавамо се са ЛЕВЕ стране

бесконачна фигура

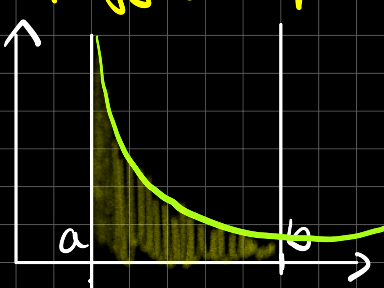
СИНГУЛАРНА ТАЧКА
у којој је ф-ја неограничена!
$f(b) \to \infty$

1° Ово је са интервал $[a,b)$

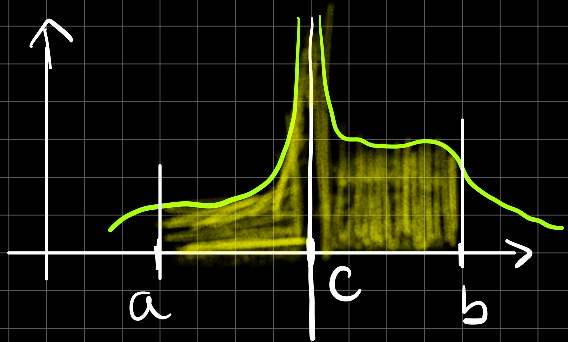
ф-ја је неогр. у десном крају интерв.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$$

2° $(a,b]$: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$



3° Шта ако је сингул. тачка по сред интервала



Ф-ја је неодр. у тачки c, $a<c<b$

тј. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

$[a,b]$: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$, $a<c<b$

пример $$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{0+\varepsilon}^4 =$$

0 је сингуларна тачка!

$f(0)\to\infty$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{0+\varepsilon}^4 = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x}\,\Big|_{0+\varepsilon}^4 =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\underbrace{\sqrt{4}}_{\to 2} - \underbrace{\sqrt{0+\varepsilon}}_{\to 0}\big) = 2\cdot 2 = 4$$

⇒ конвергира

⇒ интегр. постоји

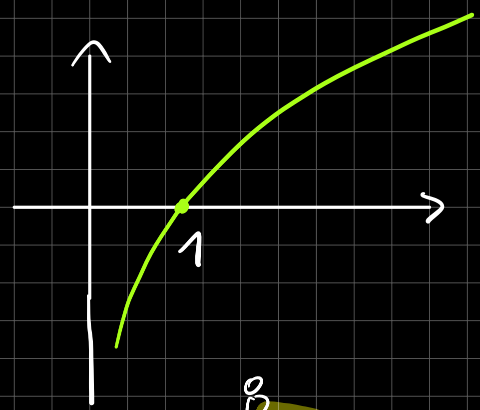
пример $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x|\,\Big|_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\,\Big|_{0+\varepsilon}^1$$

0 је сингуларна тачка

x је поз. ⇒ $|x|=x$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\big[\underbrace{\ln 1}_{\to 0} - \underbrace{\ln(0+\varepsilon)}_{\to -\infty}\big] = +\infty$$

лимес је бесконачан ⇒ интеграл дивергира



пример

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

имамо проблем у 0
0 је сингуларна тачка

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}}\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{8} x^{-\frac{1}{3}}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{0+\varepsilon}^{8} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\underbrace{(0-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}_{\to 0} - \underbrace{(-1)^{\frac{2}{3}}}_{1} \Big) + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\overset{\to 4}{8^{\frac{2}{3}}} - \overset{\to 0}{(0+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}} \Big)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{\,2} = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

Ф-ЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

$x_1, x_2, \dots, x_n$, $i = 1, \dots, n$

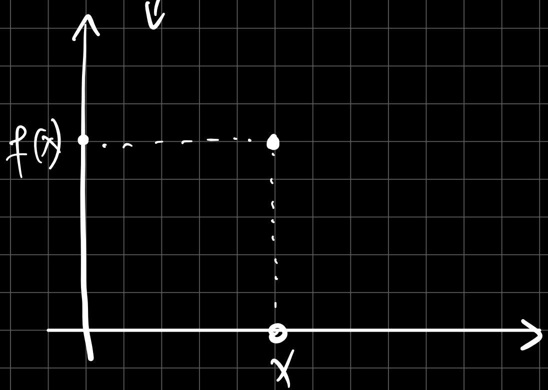
$x_i \in \mathbb{R}$

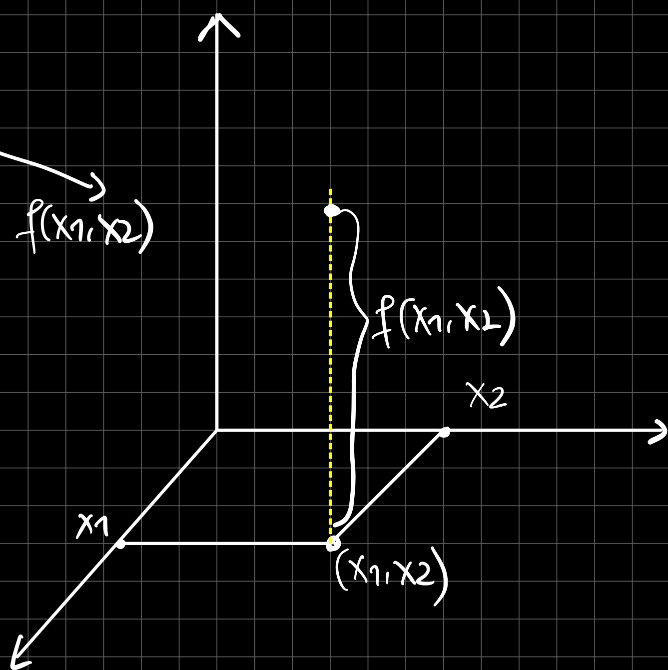
уређена n-торка реалних бр. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

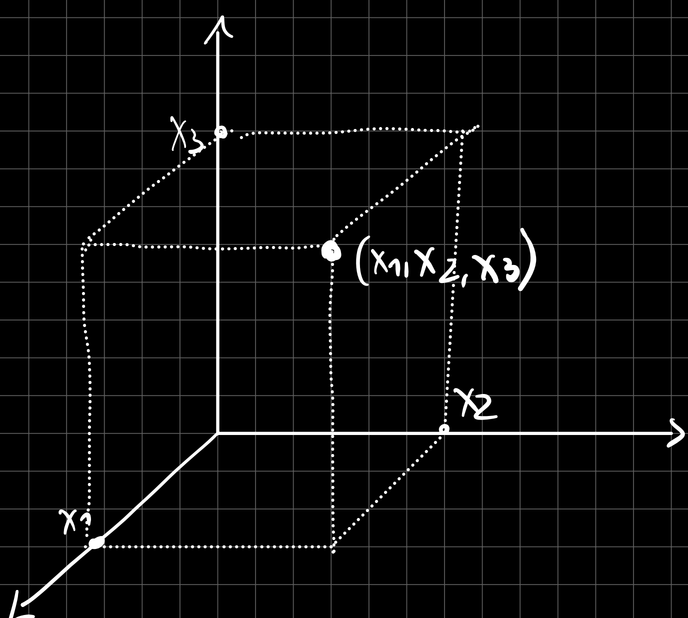
(x_1, x_2)

$x \to f(x)$

$f(x_1, x_2)$



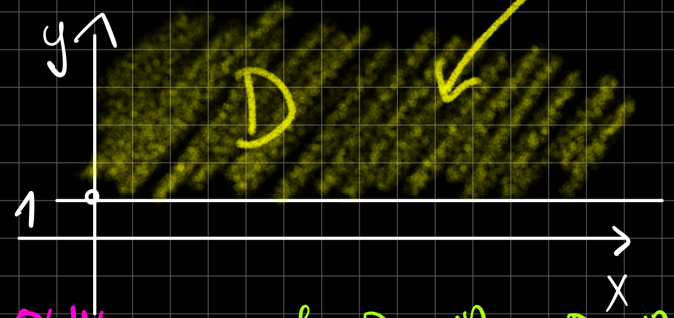




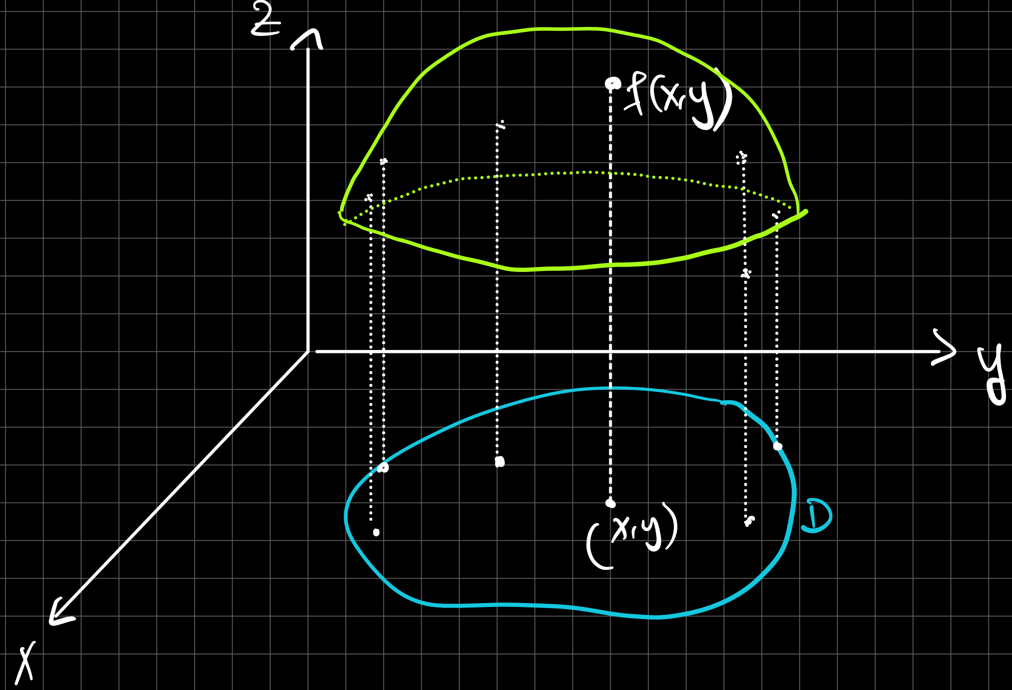
ДЕФ: .. $\mathbb{R}^n$ .. n-торки реалних бројева. $-(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ ...ако правилу f доделимо реалан број... реална ф-ја n пром.

$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2)$

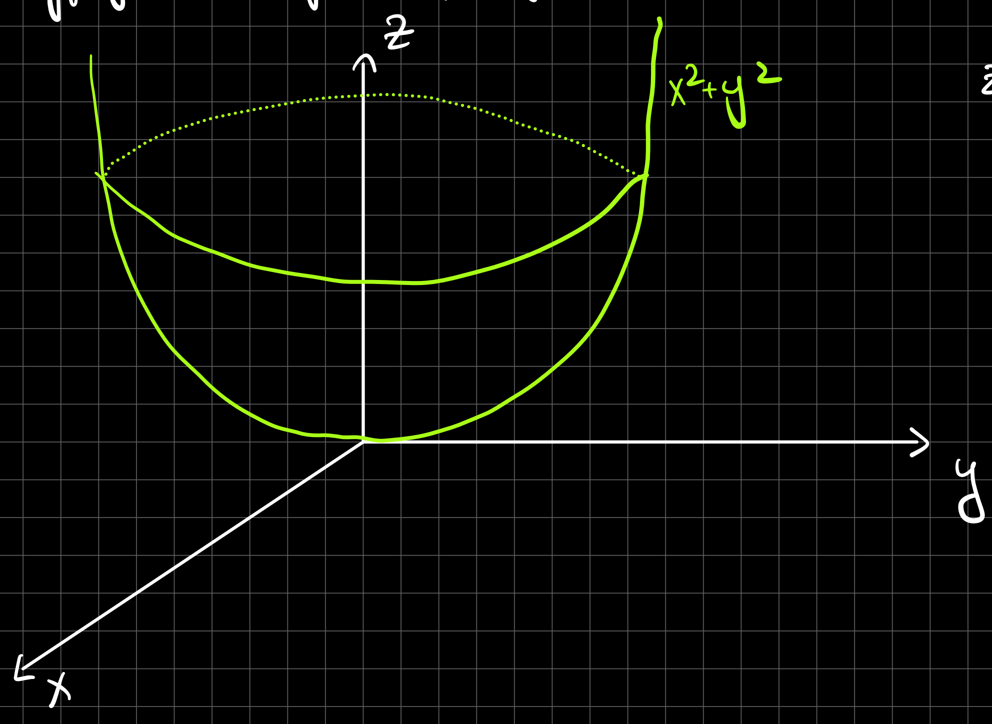
$(x,y) \to z(x,y)$ $\quad D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 1\}$



ДЕФ: ГРАФИК .. $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ је скуп тачака у простору $G = \{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$

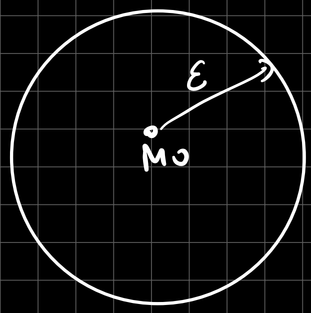


Најједноставније $f(x,y) = C = \text{const}$? $\Rightarrow$ равни!

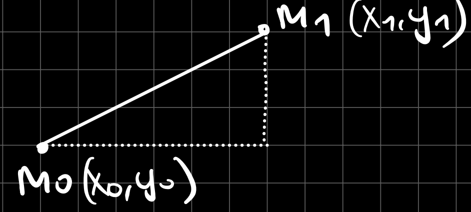


$z = x^2 + y^2$

Како ћемо деф. околину у равни?



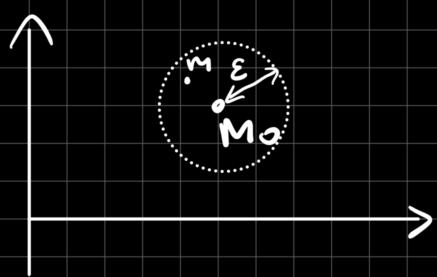
Растојање између 2 тачке?



$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$$

ДЕФ: ε – ОКОЛИНА тачке $M_0(x_0,y_0)$ је скуп тачака $M(x,y)$ за које важи $d(M_0,M) < \varepsilon$

круг!



ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ И НЕПРЕКИДНОСТ РЕАЛНЕ ФЈЕ ДВЕ РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

ДЕФ. Реалан број b је ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ $z=f(x,y)$ у $M_0(x_0,y_0)$, ако за $\forall$ поз. број ε постоји поз. број δ (који зависи од ε) таква да за све тачке M за које важи $0 < d(M_0,M_0) < \delta$ важи да је $|f(x,y)-b| < \varepsilon$

ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = b$$ или пишемо $$\lim_{M\to M_0} f(M) = b$$

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall M \in D)(0 < d(M_0,M) < \delta \Rightarrow |f(x,y)-b| < \varepsilon)$$

ТЕОРЕМА: Нека су $z=f(x,y)$ и $u=g(x,y)$ дате р. ф-је две р. пром., дефинисане $D \subset \mathbb{R}^2$. Ако $\lim_{M\to M_0} f(M)=b$ и $\lim_{M\to M_0} g(M)=c$ онда важи

1) $\lim_{M\to M_0} \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) = b \pm c$

2) $\lim_{M\to M_0} \left(f(x,y)\cdot g(x,y)\right) = b\cdot c$

3) $\lim_{M\to M_0} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{b}{c}$, $c\neq 0$, $g(x,y)\neq 0$

ДЕФ: Ф-ја $z=f(x,y)$ је НЕПРЕКИДНА у $M_0 \in D$ $\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$, тј.

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall M\in D)\left(0<d(M_0,M)<\delta \Rightarrow |f(M)-f(M_0)|<\varepsilon\right)$$

важи аналогна теорема за реалну ф-ју једне промен., која говори о непр. збира, разлике, произ. и количника...

ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ Ф-ЈЕ ДВЕ РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

$$\lim \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

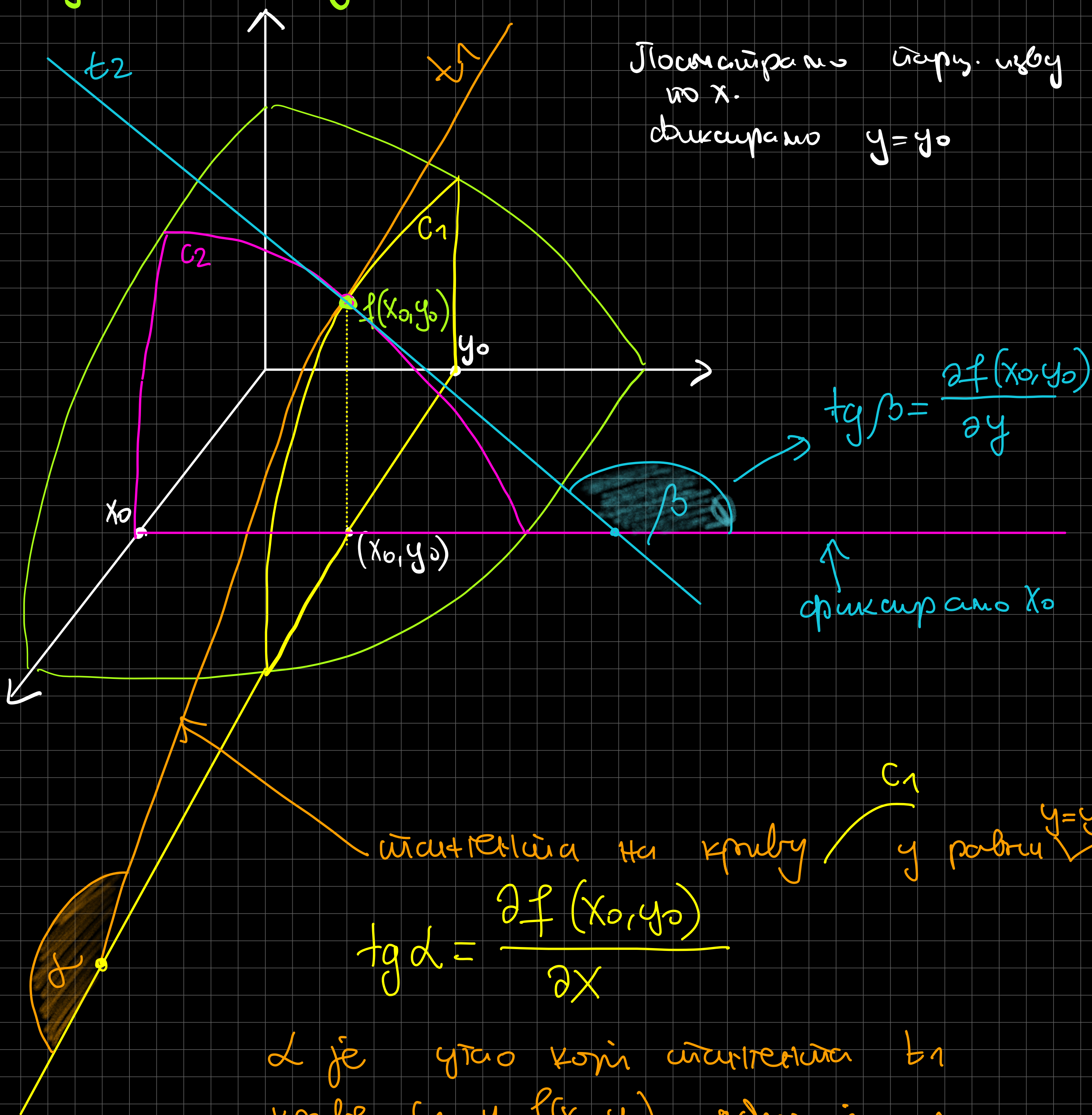
ДЕФ: Уколико постоји кон. гр. вредност $\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$, ... ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОД ф-је $z=f(x,y)$ по променљивој x.

пишемо: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $f'_x(x,y)$, $z'_x = z'_x(x,y)$, ...

1 ЕФ: ... кон. гр. вредност

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$ ... парц. извод по y.

Посматрамо парц. извод по x.
фиксирамо $y = y_0$



α је угао који тангента t_1 криве C_1 у $f(x_0,y_0)$ образује са позитивним делом x-осе

пример Нађи парц. изводе од ф-је $f(x,y)=x^2y$

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 \cdot y - x^2 y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)\cdot y - x^2 y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2 y} + 2x\cancel{\Delta x}y + \Delta x^{\cancel{2}}\cdot y - \cancel{x^2 y}}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2xy + \underbrace{\Delta x \cdot y}_{\to 0}\right) = 2xy$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 \cdot (y+\Delta y) - x^2 y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{x^2 y} + x^2 \cancel{\Delta y} - \cancel{x^2 y}}{\cancel{\Delta y}} = x^2$$

II начин:

z'_x фиксирамо y ! тј. правимо се да је константа

$$(x^2y)'_x = 2xy$$

z'_y фиксирамо x!

$$(x^2y)'_y = x^2$$

пример $z=e^{xy}$