08.04.2026.

ЊУТН-ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА: Нека је ф-ја $f(x)$ НЕПРЕКИДНА на затвореном интервалу $[a,b]$, и нека је $\Phi(x)$ њена произвољна примитивна ф-ја. Онда важи:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b$$

доказ: Пошто се пр. ф-је разл. до на константу

$$\Rightarrow \quad \Phi(x) = F(x) + C, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Нека $x=a$:

$$\Phi(a) = F(a) + C = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{\to 0} + C = C$$

$x=b$:

$$\Phi(b) = F(b) + C = \int_a^b f(t)\,dt + \underbrace{C}_{=\Phi(a)} = \int_a^b f(t)\,dt + \Phi(a)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

пример 1.

$$\int_1^2 (x^2 + x - 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 1\right) =$$

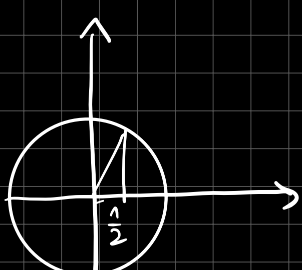
$$= \frac{8}{3} + \cancel{2} - \cancel{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$$

пример 2

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} (\sin x + 2)\,dx = (-\cos x + 2x)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$\left(-\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{\to 0} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\to 1/2} + 2\cdot\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \pi + \frac{1}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$$



СМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ КОД ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

$$\int_a^b f(\overset{x=\varphi(t)}{x})\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

где је $\varphi(t)$ непр. заједно са првим изводом и важи $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

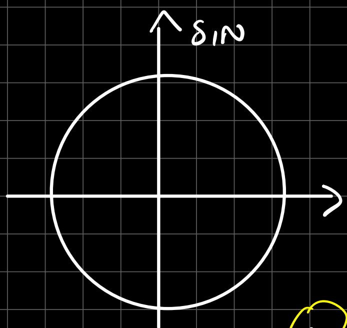
пример $\int_0^{\pi/2} \cos 2x\, dx =$

$2x = t$ $\quad$ $x=0:\ t=2\cdot 0=0$

$2dx = dt$ $\quad$ $x=\frac{\pi}{2}:\ t=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$

$$= \int_0^\pi \cos t\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)$$

$$= \frac{1}{2}(0-0) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$



пример $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}} =$

смена:

$\sqrt{x^2+3} = t \ /^2$ $\quad$ $x=-1:\ t=\sqrt{(-1)^2+3}=2$

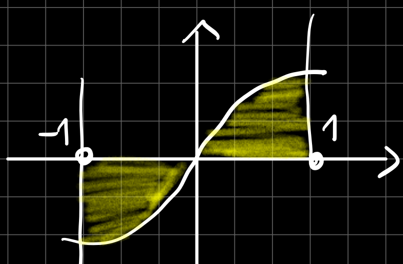
$x^2+3 = t^2 \ /'$ $\quad$ $x=1:\ t=\sqrt{1^2+3}=2$

$2x\,dx = 2t\,dt$

$x\,dx = t\,dt$

$$= \int_2^2 \frac{\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}} = \int_2^2 dt = t\Big|_2^2 = 2-2=0$$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$



ради се о непарној ф-ји

$f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \frac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2+3}} = -\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}_{f(x)} = -f(x)$$

пример $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} e^x = t \;/' & x=0:\; t=e^0=1 \\ e^x\,dx = dt & x=1:\; t=e^1=e \\ e^{2x} = t^2 & \end{array}\right] =$

$$= \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\pi/4}$$

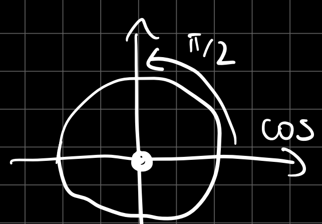
ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА КОД ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

пример $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x\,dx = \left[\begin{array}{ll} x = u & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{array}\right] =$

$$= -x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot dx = -\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \left(-0 \cdot \cos 0\right) + \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0} = 1$$



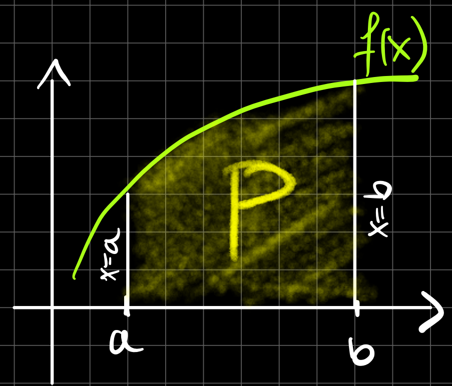
пример $\displaystyle\int_0^3 x \cdot e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{ll} x = u & dx = du \\ dv = e^{-x}\,dx & v = -e^{-x} \end{array}\right] =$

$$= -x \cdot e^{-x} \Big|_0^3 + \int_0^3 e^{-x}\,dx = -3e^{-3} - \cancel{(-0e^0)} - e^{-x}\Big|_0^3 =$$

$$= -3e^{-3} - \left(e^{-3} - \underbrace{e^{-0}}_{1}\right) = -3e^{-3} - e^{-3} + 1 = -4e^{-3} + 1$$

ПРИМЕНА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

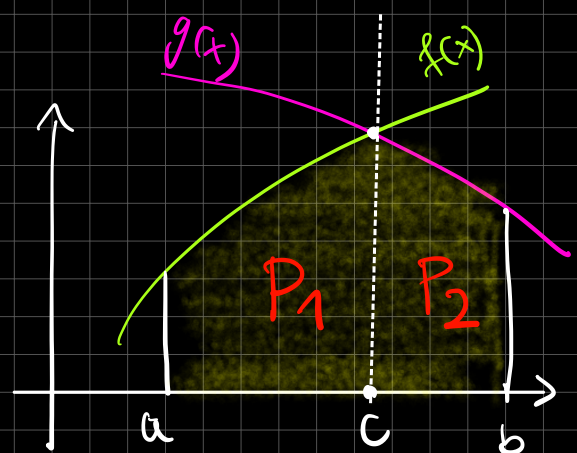
I ПОВРШИНА ФИГУРЕ У РАВНИ



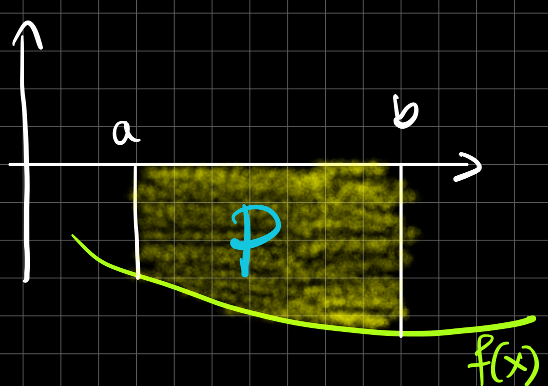
$$P = \int_a^b f(x)dx$$

ПОВРШИНА КРИВОЛ. ТРАПЕЗА

огр. графиком ф-је f(x), одсечком [a,b] и правама x=a, x=b.. израчунава се по ф-ли



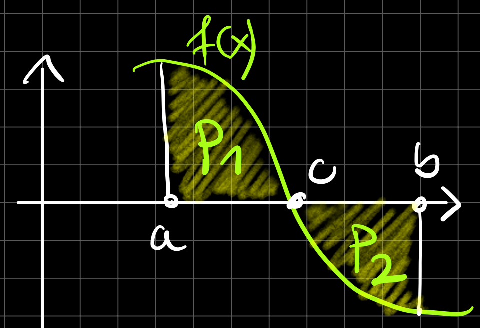
$$P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



$$P = -\int_a^b f(x)dx \overset{\text{или}}{=} \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

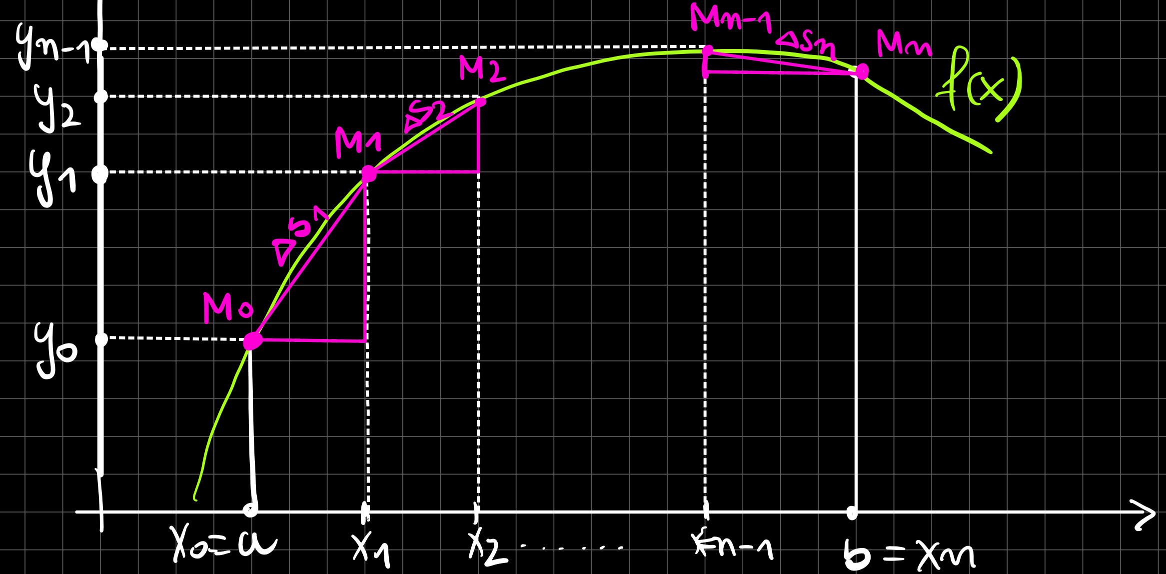
↓ исто што и

$$\int_b^a f(x)\,dx$$



$$P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

II ДУЖИНА ЛУКА КРИВЕ



$\Delta S_1 = |M_0M_1|$
$\Delta S_2 = |M_1M_2|$
$\vdots$
$\Delta S_n = |M_{n-1}M_n|$

- Дужину дужи $M_{i-1}M_i$ означимо са ΔS_i, $i=1,\dots,n$

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$$

- Дужина изломљене линије $M_0M_1M_2\cdots M_n$ једнака је

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

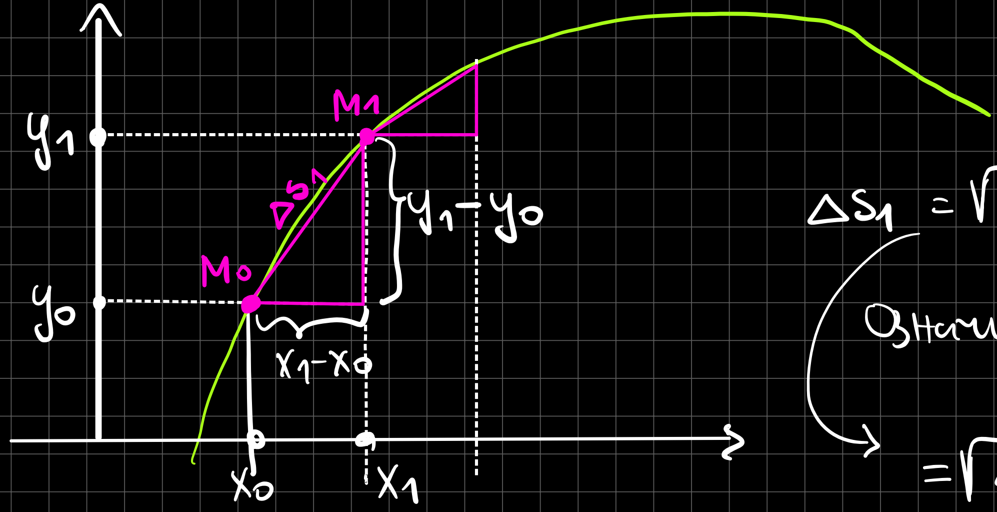
- Нека је $\Delta S_{max} = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta S_i$

- Ако је подела довољно фина, изломљена линија се неће много разликовати од криве

- Ако постоји $\lim\limits_{\Delta S_{max}\to 0} S_n$ онда тај број зовемо

ДУЖИНОМ КРИВЕ одређеном ф-јом $f(x)$ на $[a,b]$

! Показаћемо да овај лимес постоји ако је: $f(x)$ непр заједно са својим првим изводом.



$$\Delta S_1 = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$$

Означимо $\Delta x_1 = x_1 - x_0$
$\Delta y_1 = y_1 - y_0$

$$= \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} =$$

$$= \sqrt{\Delta x_1^2\left(1 + \frac{\Delta y_1^2}{\Delta x_1^2}\right)} =$$

$$= \Delta x_1 \sqrt{1 + \frac{\Delta y_1^2}{\Delta x_1^2}}$$

Добили смо $\Delta S_1 = \Delta x_1 \sqrt{1 + \frac{\Delta y_1^2}{\Delta x_1^2}}$

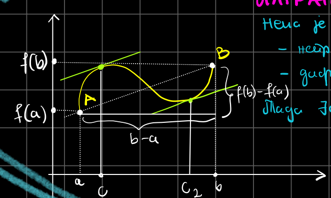
слично важи за било који троугао $\Delta S_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}$

посматрамо само овај количник:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\eta_i), \quad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

нека тачка из интервала

МАТ1



ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРЕМА:

Нека је $f: D \to \mathbb{R}$
- непрекидна на $[a,b]$
- диференцијабилна на (a,b)

Тада $\exists c \in (a,b)$ тако да
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S_{max} \to 0} S_n = \lim_{\Delta S_{max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \lim_{\Delta S_{max} \to 0} \underbrace{\sum \sqrt{1 + [f'(\eta_i)]^2} \cdot \Delta x_i}$$

Риманова интегрална сума за ф-ју $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$

пошто је $f(x)$ непр., а непрекидан је и њен $f'(x)$
$\Rightarrow$ непрек. је и ф-ја $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$.

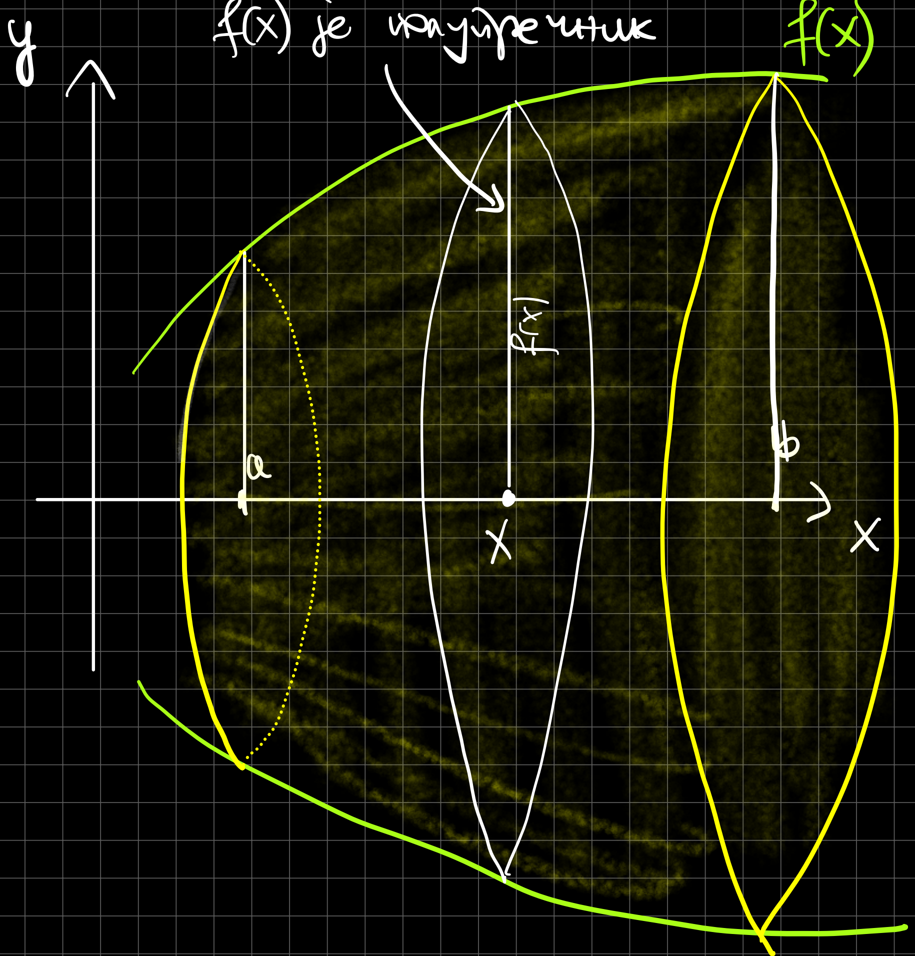
$\Rightarrow$ лимес њених интегралних сума постоји и једнак је:

$$\lim_{\Delta s_{max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\eta_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Ф-ЛА ЗА ДУЖИНУ ЛУКА КРИВЕ $f(x)$ на $[a,b]$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$$

III ЗАПРЕМИНА РОТАЦИОНОГ ТЕЛА

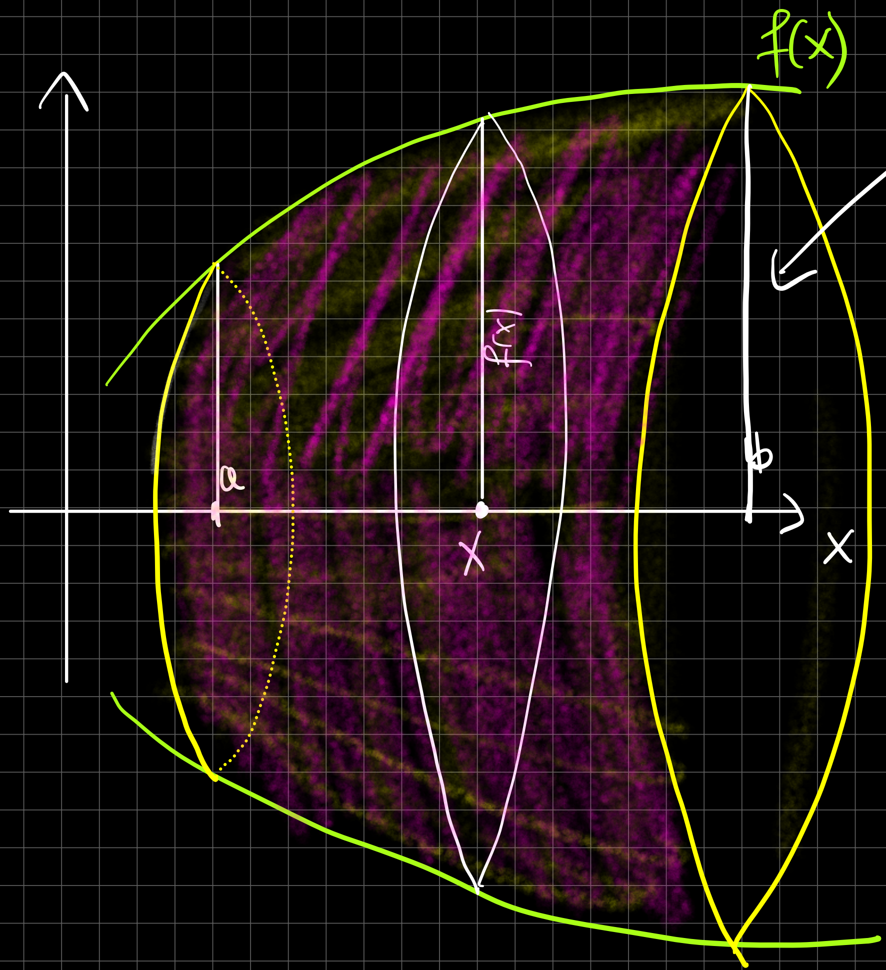


Нека је $f(x)$ непр. $[a,b]$
Посм. V тела које се добија ротацијом графика $f(x)$ око x-осе.

$$\boxed{V = \int_a^b [f(x)]^2 \pi\,dx}$$

Ф-ЛА ЗА V РОТАЦИОНОГ ТЕЛА

IV ПОВРШИНА РОТАЦИОНЕ ПОВРШИ



Нису укључени кругови са стране!

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Ф-ЛА ЗА P РОТАЦИОНЕ ПОВРШИ