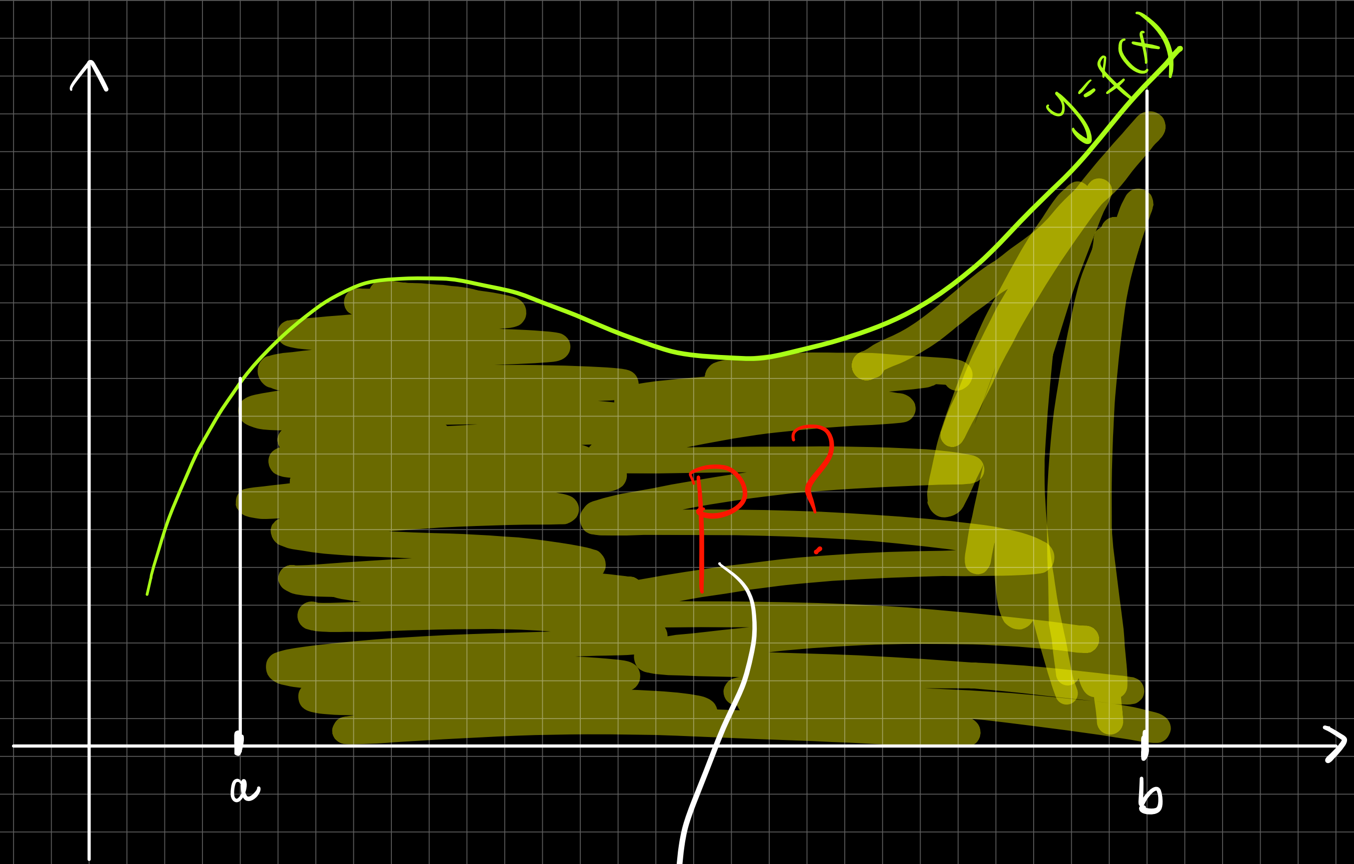
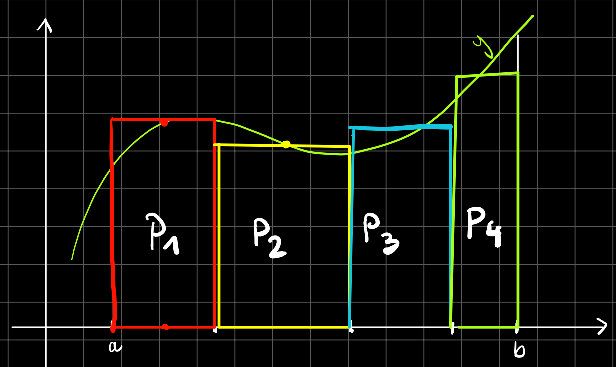
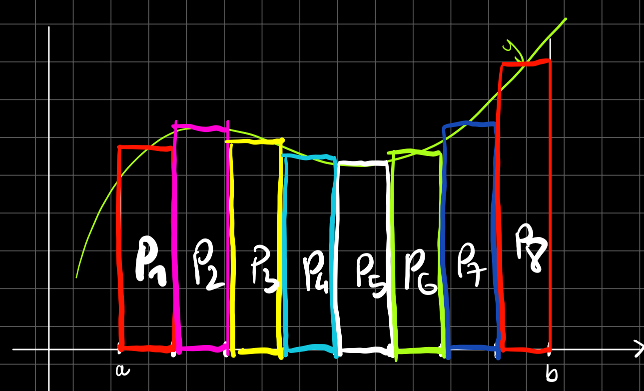
1.04.2026.

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ







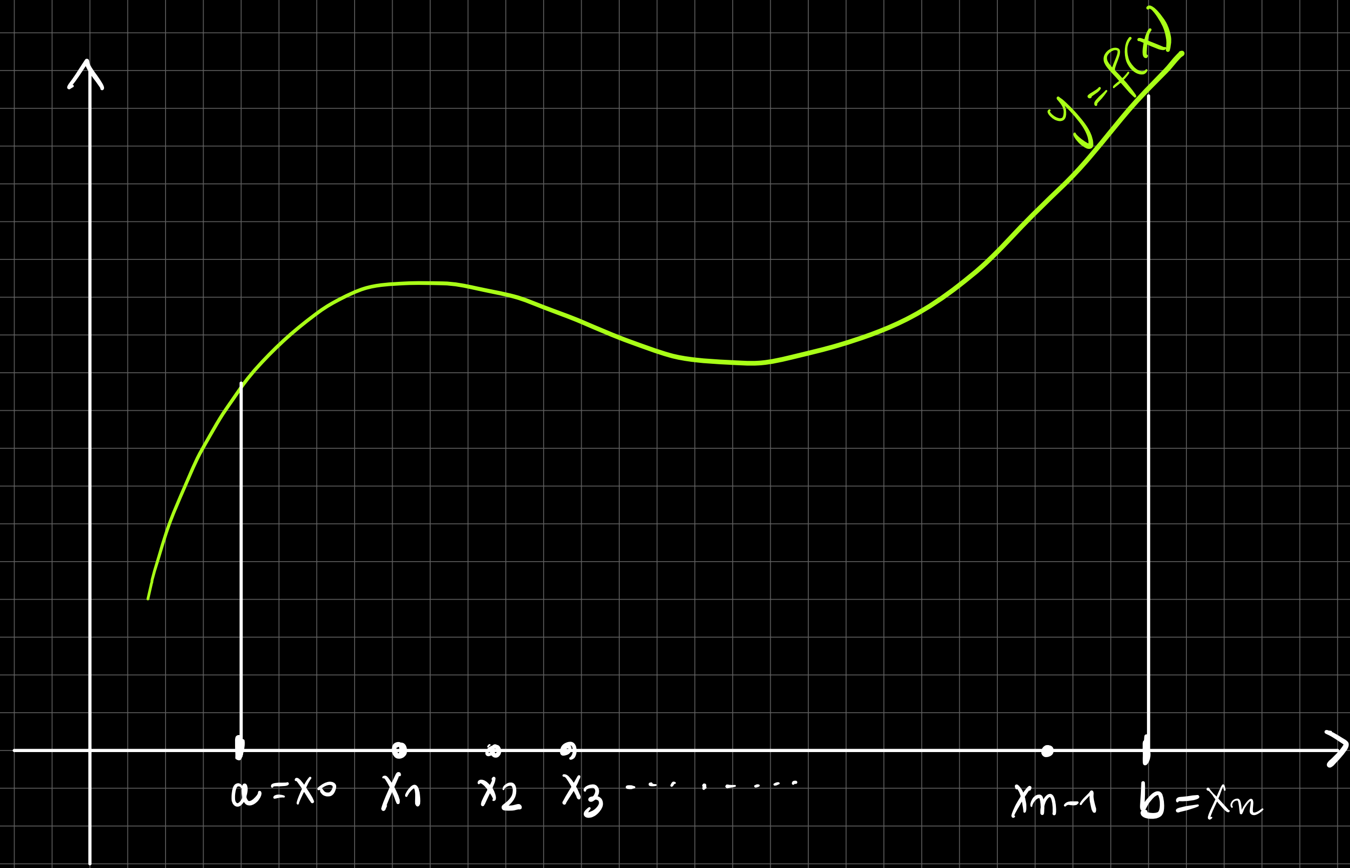
$P_1+P_2+P_3+P_4$ личи на фигуру P

→ али ова „више личи"

$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7+P_8$ на P

јер је подела интервала [a,b] ситнија...

=> циљ је да ова подела инт. [a,b] буде што „ситнија", тј. да основи правоугаоника буде јако мала (→0), па ће онда збир P правоугаоника тежити нашој P коју покушавамо да нађемо...



Нека је дата ф-ја $y=f(x)$ коју посматрамо на $[a,b]$

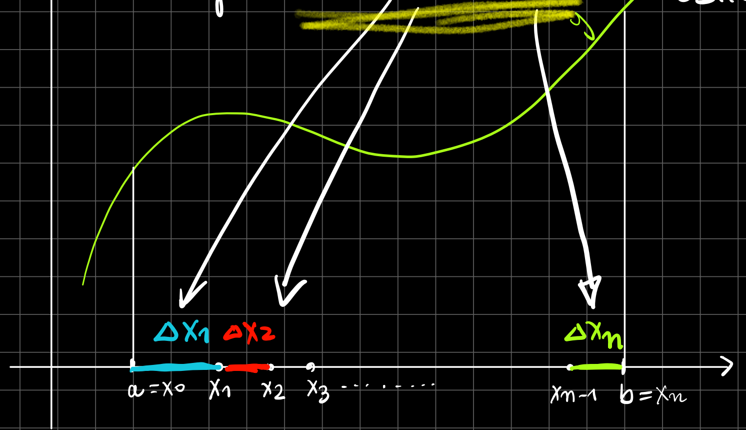
- Поделимо интервал тачкама $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ тако да:

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$ ← ПОДЕЛА ОДСЕЧКА

је уређена n-торка $(x_0, x_1, \dots, x_n)$

- Овим тачка је $[a,b]$ подељен на ПОДОДСЕЧКЕ $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1..n$ тј. ИНТЕРВАЛЕ

- Нека је са $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ означена



ДУЖИНА ИНТЕРВАЛА $[x_{i-1}, x_i]$,

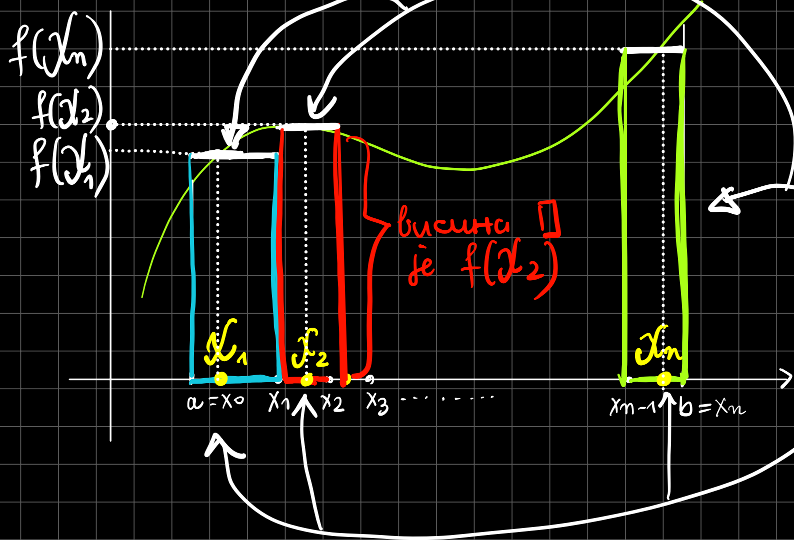
тј. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

за свако $i=1,\dots,n$

- Нека је са Δx_{max} означена дужина највећег интервала

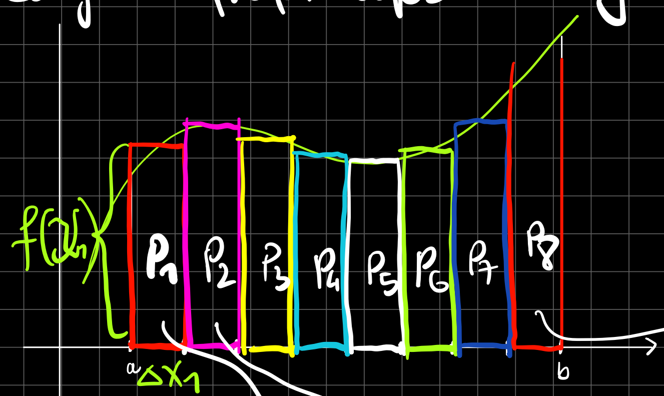
$$\Delta x_{max} = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

А како бирамо висину правоугаоника?



- У сваком интервалу изаберемо произвољну тачку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- Конструишемо правоугаонике чија је основа интервал $[x_{i-1}, x_i]$, а висина $f(\xi_i)$.

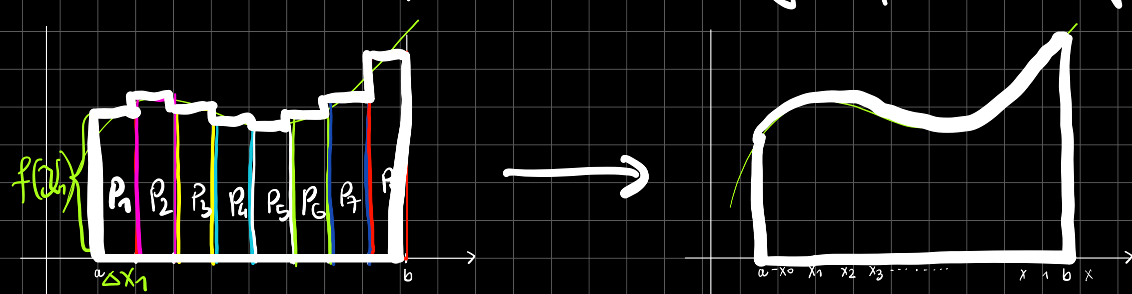
- Сада формирамо суму P правоугаоника



$$R = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

РИМАНОВА ИНТЕГРАЛНА СУМА

Ако је подела довољно фина, степенаста фигура се неће много разликовати од криволинијског трапеза

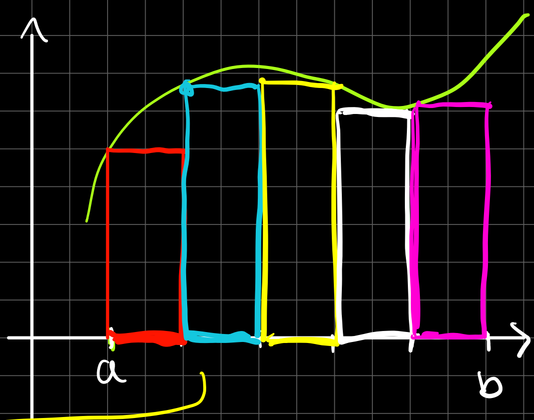


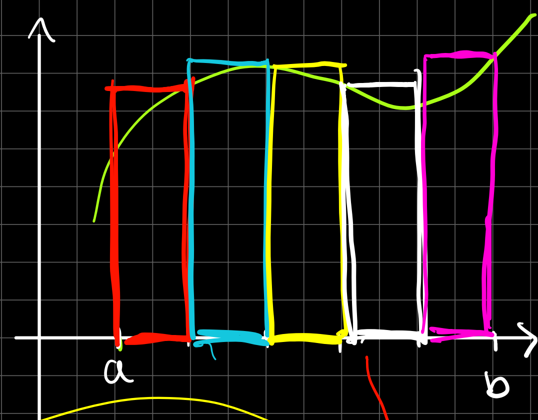
ДЕФ: Уколико постоји коначна граница вредност интегралних сума када $\Delta x_{max} \to 0$ (за $[a,b]$), која не зависи од поделе интервала $[a,b]$ нити од избора тачака ξ_i, онда се та гранична вредност назива РИМАНОВ ИНТЕГРАЛ фје $f(x)$ на интервалу $[a,b]$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \text{број!}$$

- За фју $f(x)$ кажемо да је ИНТЕГРАБИЛНА У РИМАНОВОМ СМИСЛУ ....





- инфимум ф-је $f(x)$ је највеће доње ограничење $m_i = \inf f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$
- супремум ф-је $f(x)$ је најмање горње огран. на неком Δ.

$M_i = \sup f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]$

ДОЊА ДАРБУОВА СУМА

$$s = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + m_n \cdot \Delta x_n$$

$$S = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + M_n \cdot \Delta x_n$$

ГОРЊА ДАРБУОВА СУМА

ТЕОРЕМА: ... инт. у Римановом смислу..
акко за сваки позитиван број ε, постоји подела
интервала $[a,b]$ таква да важи $S - s < \varepsilon$.

НЕКЕ КЛАСЕ ИНТЕГРАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

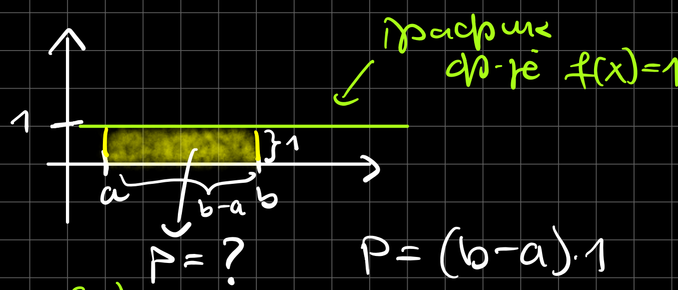
Теорема 1: Ако је ф-ја $f(x)$ НЕПРЕКИДНА на $[a,b]$, ...

Теорема 2: Ако је ф-ја $f(x)$ ОГРАНИЧЕНА на $[a,b]$
и ... КОНАЧНО МНОГО ТАЧАКА ПРЕКИДА .. $\Rightarrow$ интегр.

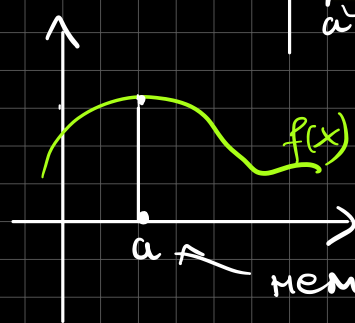
Теорема 3: Ако је ф-ја $f(x)$ МОНОТОНА на $[a,b]$
$\Rightarrow$ интегр...

Особине одређеног интеграла

1° $\displaystyle\int_a^b dx = b - a$

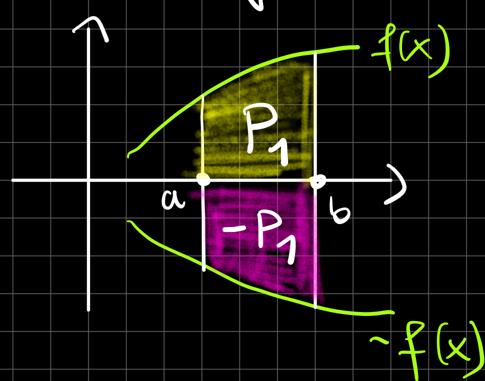


2° $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$



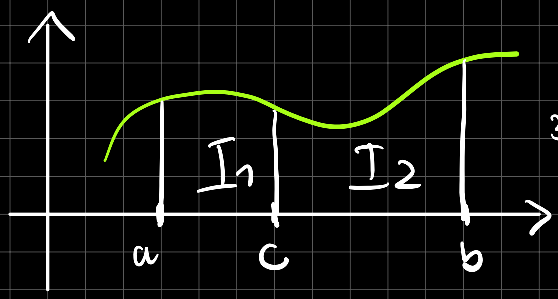
немамо "основу", тј.
дужине нула је

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

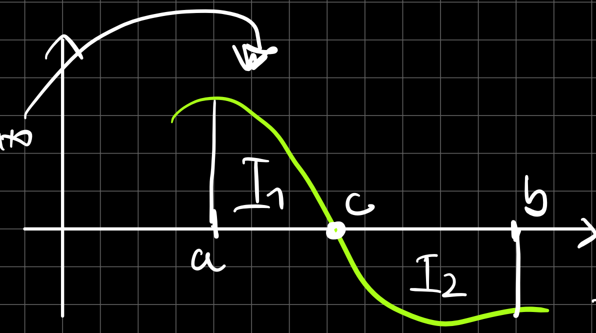


3° Ако је ф-ја $f(x)$ интегр. на $[a,b]$ и ако $c\in[a,b]$, онда је $f(x)$ инт. и на $[a,c]$ и $[c,b]$ и важи:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{I_2}$$



згодно



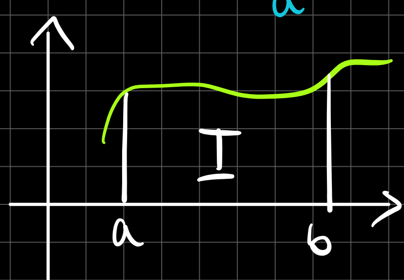
4° ЛИНЕАРНОСТ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Ако су $f(x)$ и $g(x)$ инт. на $[a,b]$... $\alpha f(x)+\beta g(x)$ такође интеградбилна на $[a,b]$ и важи:

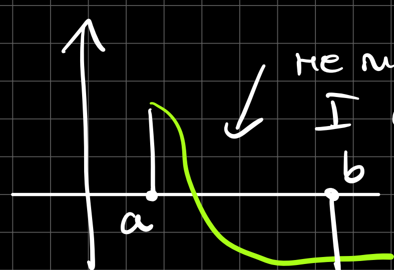
$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

не важи?

5° Ако је $f(x)$ интегр. на $[a,b]$ и ако је $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$ онда је и $\int_a^b f(x) \geq 0$.

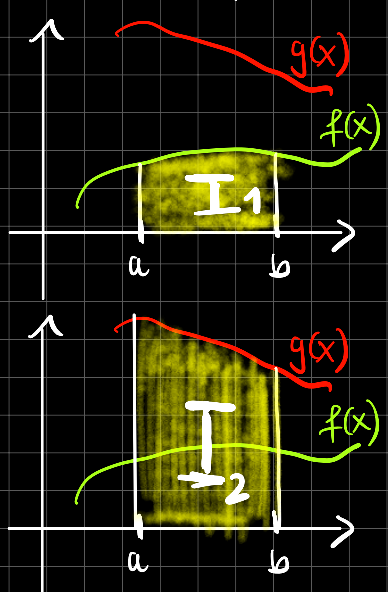


$I \geq 0$ увек



не мора I бити ≥ 0

6°

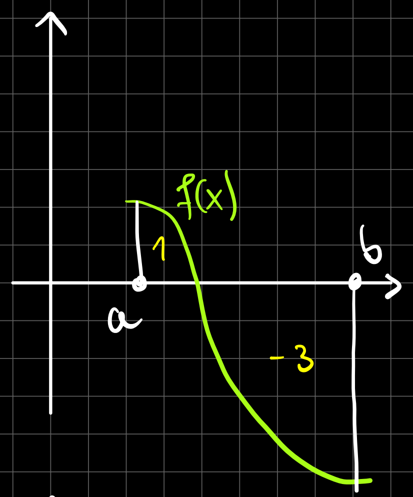


Ако су $f(x)$ и $g(x)$ интегр. $[a,b]$

... $f(x) \leq g(x), \forall x\in[a,b]$

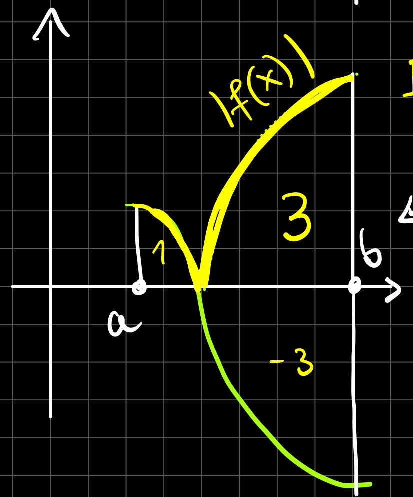
$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I_1} \leq \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{I_2}$$

7°



$1-3=-2$

$|-2|=2$

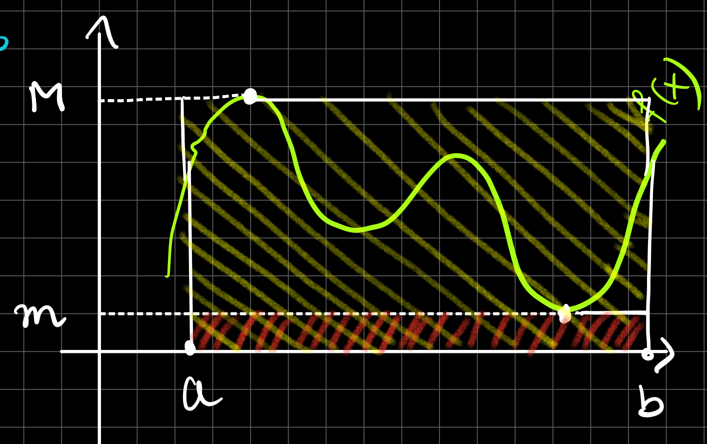


$I=1+3=4$

Ако је $f(x)$ интеграбилна на $[a,b]$ онда је и $|f(x)|$ инт. на $[a,b]$ и важи

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

8°

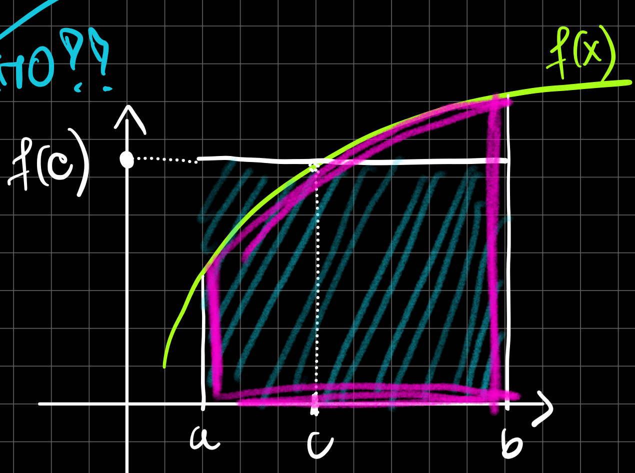


Нека је $f(x)$ инт. на $[a,b]$ и нека је $m=\inf f(x), x\in[a,b]$, $M=\sup f(x), x\in[a,b]$ ... :

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

9° ТЕОРЕМА О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ Нека је $f(x)$ непр. на интервалу $[a,b]$. Тада постоји тачка $c\in[a,b]$

ВАЖНО?!



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$ тј.

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Њутн-Лајбницова формула

Нека је $f(x)$ ф-ја која је инт. на $[a,b]$.

дефинишимо F:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

ТЕОРЕМА 1: Ако је $f(x)$ инт. на $[a,b]$ онда је $F(x)$ НЕПРЕКИДНА на $[a,b]$.

f инт $\Rightarrow$ F непр

ТЕОРЕМА 2: Ако је $f(x)$ непр. на $[a,b]$ тада је $F(x)$ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА на интервал (a,b) и важи:

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in(a,b)$$

f непр $\Rightarrow$ F диф

$F'=f$

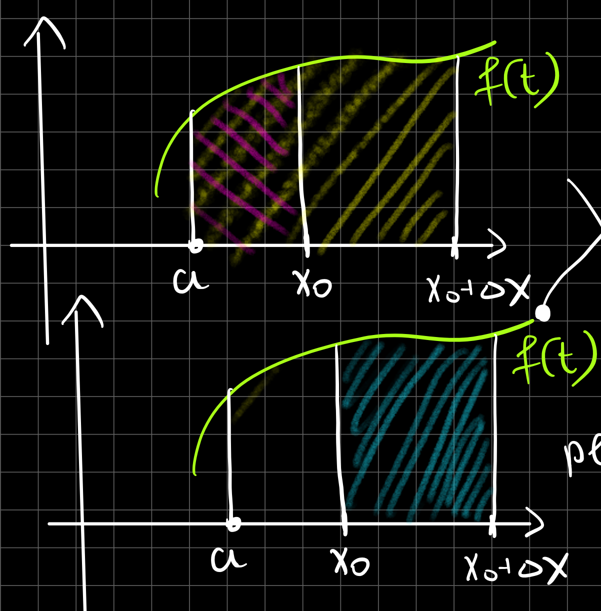
доказ:

доказ по деф

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

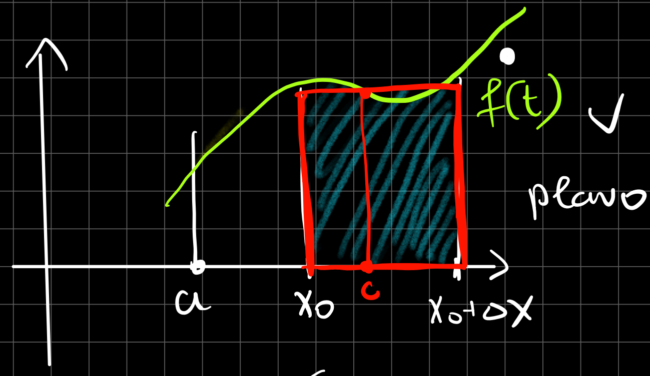
$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}=(*)$$

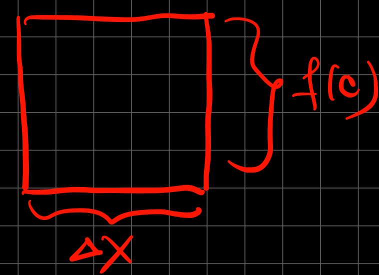


plavo + roze = žuto

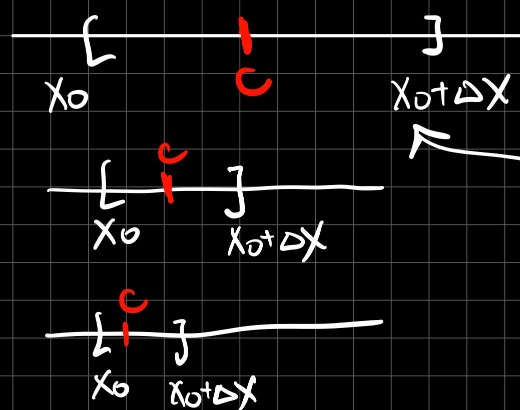
теор. о средњој вредности каже да $\exists c$



$$P_{\square} = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt$$



$$(*) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c)\cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = (*)$$



када $\Delta x \to 0$ то значи да се овај интервал смањује па $c \to x_0$

а пошто је f непр.

$\Rightarrow f(c) \to f(x_0)$ када $\Delta x \to 0$

$$(*) \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ показали $F'(x_0) = f(x_0)$, то важи за $\forall x_0$