

1. DEO ISPITA, JANUARSKI ROK

Prvi deo ispita iz Matematičke obrade eksperimentalnih podataka na TMF-u u Beogradu Januarski rok 2026 A grupa

1. Date događaje predstaviti kao unije disjunktih događaja, a zatim ispisati jednakost koja važi za te disjunktne događaje na osnovu treće aksiome teorije verovatnoće (aksiome o aditivnosti):

a) $\boxed{4}$ $D = A \cup B$

b) $\boxed{5}$ $E = A \cup B \cup C$

2. Imamo 4 žutih i 9 zelenih kutija. U svakoj žutoj kutiji su po 3 zelene i 5 žutih kuglica, a u svakoj zelenoj kutiji su po 7 zelenih i 4 žute kuglice. Iz slučajno izabrane kutije izvlače se tri kuglice.

a) $\boxed{4}$ Odrediti verovatnoću da su sve 3 izvučene kuglice žute, ako se kuglice izvlače bez vraćanja.

b) $\boxed{4}$ Odrediti verovatnoću da su sve 3 izvučene kuglice žute, ako se kuglice izvlače sa vraćanjem.

c) $\boxed{4}$ Ako je konstatovano da su izvučene 3 žute kuglice, i ako su one izvlačene bez vraćanja, odrediti verovatnoću da su one izabrane iz žute kutije.

3. Košarkaš izvodi slobodna bacanja sa velike udaljenosti. Verovatnoća da pogodi jedno bacanje iznosi samo 0.2, a bacanja su međusobno nezavisna. Igrač šutira sve dok ne postigne dva pogotka ili dok ne izvede ukupno pet bacanja, u zavisnosti od toga šta se prvo desi.

a) $\boxed{5}$ Odrediti raspodelu za slučajnu promenljivu X koja predstavlja broj izvedenih slobodnih bacanja.

b) $\boxed{6}$ Odrediti raspodelu za slučajnu promenljivu Y koja predstavlja ukupan broj postignutih pogodaka.

c) $\boxed{5}$ Odrediti matematičko očekivanje i disperziju za Y .

4. $\boxed{4}$ Odrediti a tako da data funkcija $f_X(x)$ bude funkcija gustine raspodele:

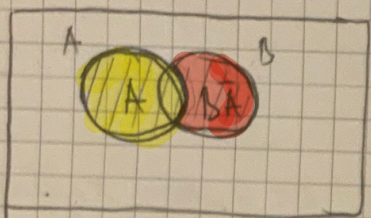
$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$$

a) $\boxed{3}$ Za tako definisanu funkciju gustine odrediti funkciju raspodele $F_X(x)$.

b) $\boxed{6}$ Odrediti verovatnoće događaja: $A = [\frac{1}{3} < X < 2]$, $B = [\frac{2}{3} < X < 4]$, $A \cup B$, AB , $A \setminus B$

REŠENJA STUDENATA:

1) a) $D = A \cup B$



$E \quad D = A \cup B \bar{A}$ ✓

$p(D) = p(A) + p(B \bar{A})$ ✓

$A \cap B \bar{A} = \emptyset$ ✓

b) $E = A \cup B \cup C$



$E \quad E = A \cup B \bar{A} \cup C \bar{A} \bar{B}$ ✓

$p(E) = p(A) + p(B \bar{A}) + p(C \bar{A} \bar{B})$ ✓

$A \cap B \bar{A} = \emptyset$ ✓

$A \cap C \bar{A} \bar{B} = \emptyset$ ✓

$B \bar{A} \cap C \bar{A} \bar{B} = \emptyset$ ✓

$A \cap B \bar{A} \cap C \bar{A} \bar{B} = \emptyset$ ✓

(2.)

4 žute kutije $\begin{cases} \rightarrow 3 \text{ zelene kuglice} \\ \rightarrow 5 \text{ žute kuglice} \end{cases}$

8 ukupno

10.15.5 \rightarrow 13.55

20.70

9 zelena kutija $\begin{cases} \rightarrow 7 \text{ zelene kuglice} \\ \rightarrow 4 \text{ žute kuglice} \end{cases}$

11 ukupno

13 kutija ukupno

$$\begin{aligned}
 a) P_1(\text{"3 žute kuglice bez vraćanja"}) &= P(\text{"žuta kutija"}) \cdot P(\text{"1. žuta kuglica"} | \text{"žuta kutija"}) \\
 &\cdot P(\text{"2. žuta kuglica"} | \text{"žuta kutija"}) \cdot P(\text{"3. žuta kuglica"} | \text{"žuta kutija"}) \\
 &+ P(\text{"zelena kutija"}) \cdot P(\text{"1. žute kuglice"} | \text{"zelena kutija"}) \\
 &\cdot P(\text{"2. žuta kuglica"} | \text{"zelena kutija"}) \\
 &\cdot P(\text{"3. žuta kuglica"} | \text{"zelena kutija"})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{13} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4^2}{7 \cdot 6} + \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} \\
 &= \frac{5}{13 \cdot 7} + \frac{12}{13 \cdot 11 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 5}{13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5} + \frac{12 \cdot 7}{13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7} \approx 0,072
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) P_2(\text{"3 žute kuglice sa vraćanjem"}) &= \frac{4}{13} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{11} = \\
 &= \frac{4}{13} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \frac{9}{13} \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^3 \approx 0,108
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) P(\text{"žuta kutija"} | \text{"3 žute kuglice bez vraćanja"}) &= \frac{P(\text{"žuta kutija"} \cap \text{"3 žute kuglice bez vraćanja"})}{P(\text{"3 žute kuglice bez vraćanja"})} \\
 &= \frac{\frac{4}{13} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}}{0,072} \approx 0,763
 \end{aligned}$$

3. slobodna bacanja sa velike udaljenosti
 bacanja su međusobno nezavisna

vov. da pogodi samo jedno bacanje : 0,2

šutira dok ne pogodi 2 šutira, ili dok ne šutne ukupno 5 puta

a) $X = ?$ X - broj izvedenih slobodnih bacanja

X :	2	3	4	5
	0,04	0,064	0,0768	

- A - "pogodio" $P(A) = 0,2$ → B - "promašio" $P(B) = 1 - P(A) = 0,8$

$$P(AA) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 = P(X=2)$$

$$\text{um} P(X=5) = 1 - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$$

$$P(X=3) = P(BAA) + P(ABA) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,032 + 0,032 = 0,064$$

$$P(X=4) = P(BBAA) + P(BABA) + P(ABBA) = (0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2) \cdot 3 = 0,0468$$

$$P(X=5) = P(BBBBB) + P(BBBBA) + P(BBBAB) + P(BBABB) + P(BABBB) + P(ABBBB)$$

$$+ P(BBBBAA) = \dots$$

$$+ P(BBABAA) + P(BABABA) + P(ABBBBA) =$$

$$= (0,8)^5 + 5 \cdot (0,2 \cdot (0,8)^4) + 4 \cdot ((0,2)^2 \cdot (0,8)^3) = 0,3277 + 0,4096 + 0,0819$$

$$P(X=5) = 0,8192 \quad \checkmark$$

	2	3	4	5
X:	0,04	0,064	0,0768	0,8192

→ E = 1 ✓

b) Y - ? Y - broj postignutih pogodaka

	0	1	2
Y:	0,3277		

$$P(Y=0) = P(BBBBB) = (0,8)^5 = 0,3277 \quad \checkmark$$

$$P(Y=1) = P(ABBBB) + P(BABBB) + P(BBABBB) + P(BBBAB) + P(BBBBA) \\ = 5 \cdot (0,2 \cdot (0,8)^4) = 0,4096 \quad \checkmark$$

$$P(Y=2) = P(AA) + P(BAA) + P(ABA) + P(BBAA) + P(BABA) + P(ABBA) \\ + P(BBBA) + P(BBAB) + P(BABB) + P(ABBB) = \\ = 0,04 + 0,064 + 0,0768 + 4 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^3 = \\ = 0,1808 + 0,08192 = 0,2627 \quad \checkmark$$

	0	1	2
Y:	0,3277	0,4096	0,2627

→ E = 1 ✓

c) E(Y) - ? D(Y) - ?

$$E(Y) = 0 \cdot 0,3277 + 1 \cdot 0,4096 + 2 \cdot 0,2627$$

$$E(Y) = 0,935 \quad \checkmark$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

	0	1	4
Y ² :	0,3277	0,4096	0,2627

$$D(Y) = 0,5862 \quad \checkmark$$

$$D(Y) = (1 \cdot 0,4096 + 4 \cdot 0,2627) - (0,935)^2 = 1,4604 - 0,8742$$

4.

 ~~$f(x) = \alpha(1-x)^2$~~

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases} \quad \alpha = ?$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \rightarrow \int_0^1 \alpha(1-x)^2 dx = 1 \rightarrow \alpha \int_0^1 (1-x)^2 dx = 1 \rightarrow \alpha \cdot \left(-\frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^1 \right) = 1$$

$$\alpha \cdot \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \alpha \cdot \frac{1}{3} = 1 \rightarrow \boxed{\alpha = 3} \quad \checkmark$$

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1 \quad \checkmark \\ 0, & x < 0, x > 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

a) $F_X(x) = ?$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ?, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_0^x 3(1-x)^2 dx = 3 \int_0^x (1-x)^2 dx = 3 \cdot \left(-\frac{(1-x)^3}{3} \Big|_0^x \right) =$$

$$= 3 \cdot \left(-\frac{(1-x)^3}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{(1-x)^3}{3} \right) = \underline{\underline{1 - (1-x)^3}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \checkmark \\ 1 - (1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1 \quad \checkmark \\ 1, & x > 1 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$b) A = \left[\frac{1}{3} < X < 2 \right] \quad B = \left[\frac{2}{3} < X < 4 \right]$$

$$P(A) = P\left(\frac{1}{3} < X < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3\right) = 1 - (1 - 0,296)$$

$$P(A) = 0,296 = \frac{8}{27}$$

$$P(B) = P\left(\frac{2}{3} < X < 4\right) = F(4) - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3\right) = 1 - (1 - 0,037)$$

$$P(B) = 0,037 = \frac{1}{27}$$

$$P(A \cup B) = P\left(\frac{1}{3} < X < 4\right) = F(4) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3\right) = 1 - (1 - 0,296)$$

$$P(A \cup B) = 0,296$$

- isto kao $P(A)$ jer je $F_X(x) = 1$ za sve $x > 1$ jednako 1

$$P(A \cap B) = P\left(\frac{2}{3} < X < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3\right) = 1 - (1 - 0,037)$$

$$P(A \cap B) = 0,037$$

- isto kao $P(B)$ opet jer je $F_X(x) = 1, x > 1$

$$P(A \setminus B) = P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3\right) - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3\right) =$$

$$= (1 - 0,037) - (1 - 0,296) = 0,296 - 0,037$$

$$P(A \setminus B) = 0,259 = \frac{7}{27}$$

