НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

25.03.2026.

$$F \xrightarrow{\text{извод}} f$$

$$F'(x) = f$$

$$dF'(x) = f(x)\,\underbrace{dx}$$

$$dx = \Delta x$$

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$(dy \neq \Delta y)$$

ДЕФ. Ф-ја $F(x)$ је ПРИМИТИВНА Ф-ЈА ф-је $f(x)$ на (a,b) ... :

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

пример

$f(x) = \sin x \implies F(x) = -\cos x$, јер $(-\cos x)' = \sin x$

$f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x$

$f(x) = e^x \implies F(x) = e^x$

$f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$

$\implies (x^2)' = 2x$

али $(x^2+1)' = 2x$

$(x^2+500)' = 2x$

$\vdots$

за свако $c \implies (x^2+c)' = 2x$

НАПОМЕНА: Ако је $F(x)$ прим. ф-ја ф-је $f(x)$ .. (a,b)

... $\implies F(x)+C$ примитивна од $f(x)$ .. (a,b)

$$(F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x)$$

ТЕОРЕМА: Две прим. ф-је ...

1 ДЕФ: Скуп свих примитивних ф-ја $F(x)+C$ дате ф-је $f(x)$.. НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ ф-је $f(x)$:

подинтегрални израз

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

интеграл

подинтегрална ф-ја

ОСОБИНЕ:

1° $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ ← ОПЕРАЦИЈЕ ДИФЕРЕНЦИРАЊА И ИНТЕГРАЦИЈЕ СУ ИНВЕРЗНЕ (ДО НА КОНСТАНТУ)

2° $\int dF(x) = F(x)+C$

$$\left[\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x)+C\right]$$

3° ХОМОГЕНОСТ

$$\int \alpha\cdot f(x)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx, \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

4° $\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3°–4° кад се споје дају особину ЛИНЕАРНОСТИ:

$$\int [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$$

пример

1° $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + C$ → у табл.

2° $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

3° $(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$ → таблица..

4° $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

5° $$\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)' = \frac{1}{\cancel{\alpha}} \cdot \cancel{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$$

$$\int x^{\alpha-1}\,dx = \frac{x^\alpha}{\alpha} + C$$

$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

6° $$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(a^x)' = \frac{1}{\cancel{\ln a}} \cdot a^x \cdot \cancel{\ln a} = a^x$$

$$\Rightarrow \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛА

$$\int dx = x + C$$

$$\int 0 \cdot dx = 0 + C = C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

спец. случај $\alpha = -1 \Rightarrow$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

спец. случај $a = e \Rightarrow$ $\int e^{x} dx = e^{x} + c$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq k\pi$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arc\,tg} x +$$

МЕТОДА НЕПОСРЕДНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

- .. састоји .. тр. сводити израза и таблица интегр.
- .. особина неодр. интеграла.

пример

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x} + 2}{x^4} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^4} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4} + \frac{2}{x^4} \right) dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x^4} dx + \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4} dx + \int \frac{2}{x^4} dx =$$

$$= \int x^{-2} dx + \int x^{-\frac{11}{3}} dx + 2 \int x^{-4} dx =$$

наведено у таблици

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{1}{x^4} = x^{-4}$$

$$\frac{1}{3} - 4 = \frac{1}{3} - \frac{12}{3} = \frac{1-12}{3} = \frac{-11}{3}$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_1 + \frac{x^{-\frac{11}{3}+1}}{-\frac{11}{3}+1} + C_2 + 2\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C_3$$

$$\boxed{\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1}$$

$C_1 + C_2 + C_3 =$ нека константа C

$$= -x^{-1} - \frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{8}{3}} - \frac{2}{3}\cdot x^{-3} + C$$

пример

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx = (*)$$

у таблици имамо

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg x + C, \\ &\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctg x + C, \end{aligned}}$$

$$(*) = \int \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x\,\cancel{\sin^2 x}}\,dx + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}\,\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= tg x - ctg x + C$$

пример

$$\int (5x-2)^2\,dx = \int (25x^2 - 20x + 4)\,dx =$$

$$25\int x^2\,dx - 20\int x\,dx + 4\int dx =$$

$$25\cdot\frac{x^3}{3} - 20\cdot\frac{x^2}{2} + 4\cdot x + C$$

МЕТОДА СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

ТЕОРЕМА: .. $x=\varphi(t)$ дифф. на (α,β), .. (a,b) скуп вредности ф-је φ .. сложена ф-ја $f(\varphi(t))$. Ако $f(x)$ има прим. ф-ју $F(x)$, онда и слож. ф-ја $f(\varphi(t))$ .. $F(\varphi(t))$:

$$\int f(\underbrace{x}_{\varphi(t)})\underbrace{dx}_{\varphi'(t)\,dt} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\underbrace{\varphi(t)}_{\text{овде враћамо } x}) + C$$

НАПОМЕНА: У случ. када φ има инверзију, може се користити смена $t=\varphi(x)$ и при томе се ф-ла користи с десна на лево.

<u>пример</u> $\int (\underbrace{5x-2}_{t=\varphi(x)})^2\,dx$

$$\int (\underbrace{5x-2}_{t})^{11} \underbrace{dx}_{?}^{\frac{dt}{5}} = \left[\begin{array}{l} \text{смена } t=5x-2 \\ \text{диференцирамо да ли у изразу добијамо } dx \\ dt = d(5x-2) \\ \quad = d(5x) - d2 \quad (=0) \\ \quad = 5\,dx \quad \Rightarrow \quad dt = 5\,dx \end{array}\right]$$

$$= \int t^{11}\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^{11}\,dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{12}}{12} + C = \frac{1}{60}(5x-2)^{12} + C$$

пример. $\int e^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{l} \text{смена } t=2x \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \end{array}\right]$

$$= \int e^t\cdot\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

пример $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+3x+7 \\ dt = d(x^2+3x+7) \\ \quad = (2x+3)dx \end{array} \right]$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+3x+7| + C$$

МЕТОДА ПАРЦИЈАЛНЕ ИНТЕГРАЦИЈЕ

пример $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} \text{смена } \ln x = t \\ d(\ln x) = dt \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

$$\int x \ln x\, dx = \left[\begin{array}{l} \text{смена } t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow dx = x\, dt \end{array} \right] = \int x \cdot t \cdot x\, dt \quad \cancel{\checkmark}$$

ТЕОРЕМА: Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диф. ф-је. Ако ф-ја $u'(x) \cdot v(x)$ има пр. $\Rightarrow$ $u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x)v'(x)dx = uv - \int u'(x)v(x)\, dx$$

скраћени запис: $\int uv' = uv - \int u'v$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

доказ: $d(uv) = du \cdot v + u\, dv \quad / \int$

$$\int d(uv) = \int v\, du + \int u\, dv$$

uv

$$\Rightarrow \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Пример

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x \cdot dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = ? \end{array} \right]$$

хтели да буде

$t = \ln x$

остаје иста идеја

Урадимо интеграл

$$\int dv = \int x \, dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

користимо

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \overset{u}{\ln x} \cdot \overset{v}{\frac{x^2}{2}} - \int \overset{v}{\frac{x^2}{2}} \cdot \overset{du}{\frac{dx}{\cancel{x}}} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

сада додајемо C када више нема интеграла

Пример

$$\int \underset{u}{x^2} \cdot \underset{dv}{e^x \, dx} = \left[\text{пробајмо} \quad u = e^x \quad dv = x^2 \, dx \right]$$

Домаћи: да ли је нови интеграл једноставнији?

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x \, dx \\ du = 2x \, dx & v = \int e^x \, dx \\ & v = e^x \ (+C) \end{array} \right]$$

не пишемо C сада, појавиће се на крају

$$\overset{u \cdot v}{=\ x^2 \cdot e^x} \ \overset{- \int v \cdot du}{- 2 \int e^x \overset{u}{x} \, dx} = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x \, dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right]$$

смањио се степен

$x \Rightarrow$ идеју да поново применимо исту смену

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \left[\overset{u \cdot v}{x \cdot e^x} - \overset{\int v \cdot du}{\int e^x \, dx} \right]$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$