

# 2. DEO ISPITA, JANUARSKI ROK 2026

Drugi deo ispita iz Matematičke obrade eksperimentalnih podataka na TMF-u u Beogradu, Januarski rok 2026

- U kutiji se nalazi 13 kuglica označenih brojevima 1, 2, ..., 13. Na slučajan način je izvučena jedna kuglica. Slučajna promenljiva  $X$  uzima vrednost 1 ako je izvučen paran broj, a vrednost 0 ako je izvučen neparan broj. Slučajna promenljiva  $Y$  predstavlja ostatak pri deljenju izvučenog broja sa 3.
  - 5 Odrediti raspodelu dvodimenzione slučajne promenljive  $(X, Y)$
  - 2 Odrediti  $E(X)$  i  $E(Y^2)$ .
  - 3 Odrediti  $E(X|Y \geq 1)$
  - 3 Odrediti  $E(X+Y)$
  - 4 Odrediti  $E(XY)$ . Kada važi da je  $E(XY) = E(X)E(Y)$  za proizvoljne  $X$  i  $Y$ ?
- Ako slučajna promenljiva  $Z$  ima standardnu normalnu raspodelu, odrediti konstantu  $c$  tako da važe jednakosti:
  - 2  $F(c) = 0.9838$
  - 3  $P(Z \leq c) = 0.6736$
  - 3  $P(c \leq Z) = 0.121$
  - 3  $P(Z \leq c) = 0.1401$
  - 3  $P(-c \leq Z \leq c) = 0.668$
  - 3  $P(|Z| \leq c) = 0.6542$
- Otac i sin šutiraju penale. U svakoj rundi oboje šutiraju po jednom, nezavisno jedno od drugog. Sin pogadja sa verovatnoćom 0.2, dok otac pogadja sa verovatnoćom 0.6. Poeni se dodeljuju po sledećem pravilu:
  - Ako sin pogodi, a otac promaši, tada sin dobija 2 poena.
  - Ako oboje pogode, tada sin dobija 1 poen.
  - Ako otac pogodi, a sin promaši, tada otac dobija 1 poen.
  - Ako oboje promaše, tada niko ne dobija poen.

Igra se završava kada jedan od igrača ostvari prednost od najmanje 2 poena. Neka stanje bude razlika rezultata nakon svake runde:  $X_n = (\text{poeni Od Sina}) - (\text{poeni Od Oca})$ .

  - 4 Koja stanja će biti završna?
  - 6 Opisati Markovljevim procesom ovu igru (odrediti sva stanja, prelaskе, kao i njihove verovatnoće).
  - 6 Odrediti verovatnoću da sin pobedi najkasnije do kraja treće runde.

## REŠENJA STUDENATA:

13 kuglica  
 $X = 1$  ako je paran, 0 ako je neparan  
 $Y$  - ostatak pri deljenju izvučenog br. sa 3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7/13 & 6/13 \end{pmatrix}$

$Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4/13 & 5/13 & 4/13 \end{pmatrix}$

a)

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	$\frac{2}{13}$ ✓	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	$P(X=0) = \frac{7}{13}$
1	$\frac{2}{13}$ ✓	$\frac{1}{13}$ ✓	$\frac{2}{13}$	$P(X=1) = \frac{6}{13}$
	$P(Y=0) = \frac{4}{13}$	$P(Y=1) = \frac{5}{13}$	$P(Y=2) = \frac{4}{13}$	

$P(X=0, Y=0) = P(Y=0|X=0) \cdot P(X=0) = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{13} = \frac{2}{13}$

$P(X=0, Y=1) = P(Y=1|X=0) \cdot P(X=0) = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{13} = \frac{3}{13}$

$P(X=0, Y=2) = P(Y=2|X=0) \cdot P(X=0) = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{13} = \frac{2}{13}$

$P(X=1, Y=0) = P(Y=0|X=1) \cdot P(X=1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{2}{13}$

$P(X=1, Y=1) = P(Y=1|X=1) \cdot P(X=1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{1}{13}$

$P(X=1, Y=2) = P(Y=2|X=1) \cdot P(X=1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{2}{13}$

b)  $E(X) = 0 \cdot \frac{7}{13} + 1 \cdot \frac{6}{13} = \frac{6}{13}$  ✓

$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{4}{13} + 1^2 \cdot \frac{5}{13} + 2^2 \cdot \frac{4}{13}$   
 $= \frac{5}{13} + \frac{16}{13} = \frac{21}{13}$  ✓

c)  $E(X|Y \geq 1)$

$X|Y \geq 1: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

$P(X=0|Y \geq 1) = \frac{P(X=0, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{5/13}{9/13} = \frac{5}{9}$

$P(X=1|Y \geq 1) = \frac{P(X=1, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{4/13}{9/13} = \frac{4}{9}$  ✓

$E(X|Y \geq 1) = 0 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$  ✓

d)  $E(X+Y) = ?$  *Može u preko distribucije*

$X+Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$   $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X+Y) = 0 \cdot \frac{2}{13} + 1 \cdot \frac{5}{13} + 2 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{2}{13}$   
 $= \frac{5}{13} + \frac{8}{13} + \frac{6}{13} = \frac{19}{13}$  ✓

e)  $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$  važi kada su  $X$  i  $Y$  nezavisne ✓

$$X \cdot Y: \begin{pmatrix} 0 \checkmark & 1 \checkmark & 2 \checkmark \\ \frac{9}{13} \checkmark & \frac{2}{13} \checkmark & \frac{2}{13} \checkmark \end{pmatrix}$$

$$E(XY) = 0 \cdot \frac{9}{13} + 1 \cdot \frac{2}{13} + 2 \cdot \frac{2}{13} = \frac{2}{13} + \frac{4}{13} = \frac{6}{13} \checkmark$$

(2)

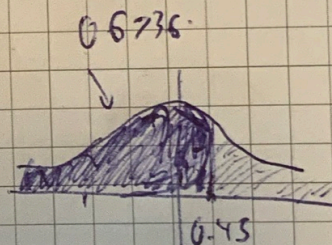
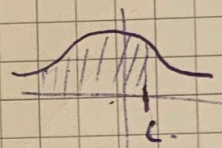
(a)  $\Phi(c) = 0.9838$

$(c = 2.14)$  sa tabela ✓

(b)

$P(Z \leq c) = 0.6736 \checkmark$   
 $\Rightarrow \Phi(c) = 0.6736$

$(c = 0.45)$  sa tabela ✓

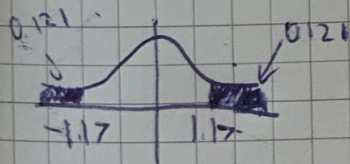


(c)

$P(c \leq Z) = P(Z \geq c) = 0.121$

$= (1 - 0.879)$

sa tabela



$(c = -1.17)$

$(c = 1.17)$  ✓



(d)

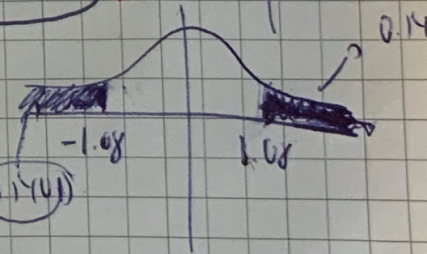
$P(Z \leq c) = 0.1401$

$= (1 - 0.8599)$

$(c = -1.08)$  sa tabela

$(c = -1.08)$  ✓

0.1401



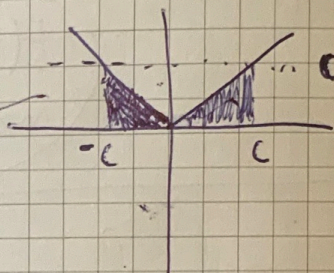
$$(D) P(-c \leq Z \leq c) = 0.668$$

$$\Phi(c) - (1 - \Phi(c)) = 0.668$$

$$2\Phi(c) - 1 = 0.668$$

$$\Phi(c) = 0.834$$

$$\Downarrow$$
$$c = 0.97 \quad \checkmark$$



$$(F) P(|Z| \leq c) = 0.6542$$

$$P(-c \leq Z \leq c) = 0.6542$$

$$\Phi(c) - (1 - \Phi(c)) = 0.6542$$

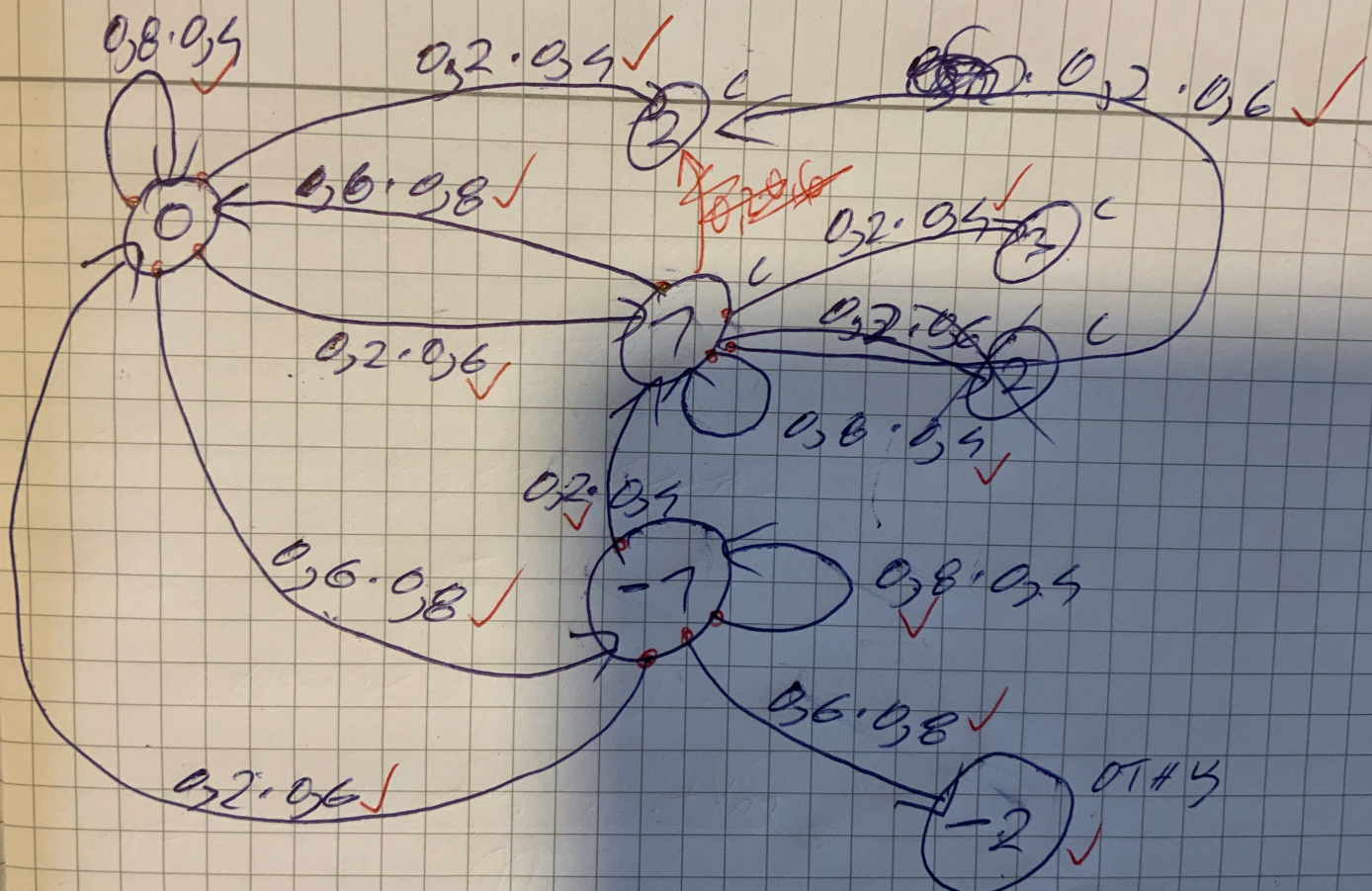
$$2\Phi(c) - 1 = 0.6542$$

$$\Phi(c) = 0.8271$$

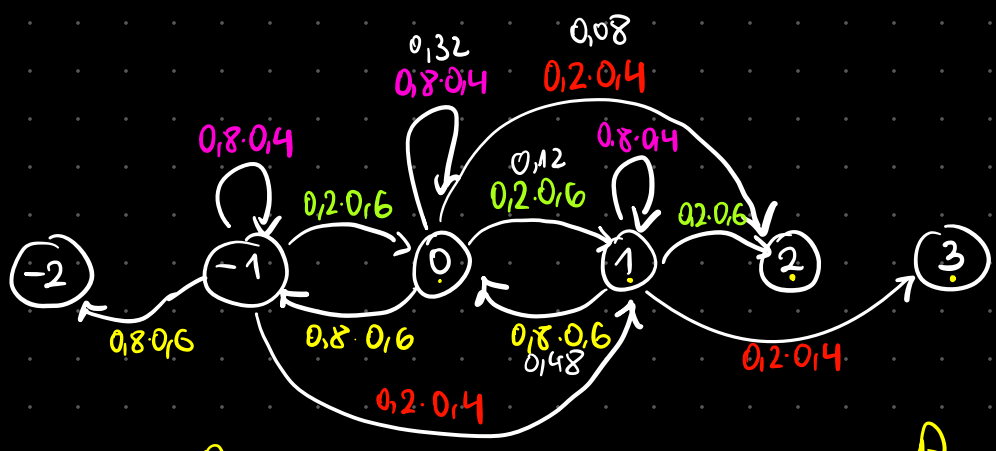
$$c = \approx 0.945 \quad \text{Nije tačno na tabeli}$$

$$\text{izvedaju } 0.94 : 0.95 \quad \checkmark$$

3. a) Završna stanja su  $(-2)$ ,  $(2)$  i  $(3)$



malo preglednije:



c)

	$P$	$P$
$0 \rightarrow 2$	$0,08$	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 2$ $0,008192$
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$	$0,0144$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2$ $0,004608$
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3$	$0,0096$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ $0,003072$
$0 \rightarrow 0 \rightarrow 2$	$0,0256$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ $0,004608$
$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$	$0,004608$	$0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 2$ $0,004608$
$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3$	$0,003072$	$0 \rightarrow -1 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ $0,003072$
		$0 \rightarrow -1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ $0,004608$

$P = 0,17048$

