

1. Dvodimenziona slučajna promenljiva ima raspodelu: $(X, Y) : \begin{pmatrix} (0, -1) & (1, -1) & (0, 0) & (1, 0) & (1, 1) \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$. Odrediti:

- a) 4 matematička očekivanja i disperzije slučajnih veličina X i Y
- b) 3 raspodelu za slučajne veličine XY i XY^2
- c) 4 matematičko očekivanje i disperziju slučajne veličine $Z = 2X + Y^2$ bez određivanja raspodele za Z
- d) 2 $P(X > Y)$
- e) 4 $E(Y|X = 1)$

2. Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $X \sim N(-2, 16)$, odrediti:

- a) 3 $P(X \geq 2)$?
- b) 3 $P(|X| \geq 3)$?
- c) 3 $P(X^2 - X \leq 6)$?
- d) 3 Odrediti x takvo da je $P(X \leq x) = 0.9927$.
- e) 4 Odrediti x takvo da je $P(X \leq x) = 0.2776$.

3. Nikola ima 5 pari naočara. Neke su mu kod kuće, a neke u kancelariji. Pretpostavimo da se Nikola kreće samo od kuće ka kancelariji, i iz kancelarije ka kući. Ponese naočare sa sobom, samo kada je sunčano. Ukoliko nije sunčano, ne nosi naočare sa sobom nazad, nego ih ostavlja (kod kuće ili u kancelariji). Može se dogoditi da su sve naočare na jednoj lokaciji, da je Nikola na drugoj, i ukoliko je tada sunčano, a Nikola mora da krene, tada Nikola ide bez naočara i smeta mu sunce. Neka verovatnoća da će biti sunčano iznosi 0.7. Ako svakom stanju odgovara BROJ pari naočara za sunce koje se nalaze na lokaciji gde je Nikola TRENUTNO (ili kuća ili kancelarija), tada:

- a) 7 Opisati Markovljevim lancem predstavljene tranzicije: odrediti moguća stanja, prelaskе kroz njih, kao i verovatnoće prelazaka.
- b) 4 Ako Nikola polazi sa lokacije gde su sve naočare, koja je verovatnoća da će nakon 2 prelaska, Nikoli smetati sunce?
- c) 6 Ako Nikola polazi sa lokacije gde je 4 pari naočara, koja je verovatnoća da će nakon 4 prelazaka, Nikola samo jednom šetati bez naočara?

$(X, Y) : \begin{pmatrix} (0, -1) & (1, -1) & (0, 0) & (1, 0) & (1, 1) \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$

$X \rightarrow 0, 1$; $Y \rightarrow -1, 0, 1$

$X \backslash Y$	0	1	
-1	0,1	0,2	0,3
0	0,2	0,3	0,5
1	0	0,2	0,2

$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

$Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$

$E(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,7 = 0,7$

$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,7 = 0,7$

$E(Y) = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 = -0,1$

$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,5 + 1^2 \cdot 0,2 = 0,5$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,7 - 0,49 = 0,21$

$\sigma_X = \sqrt{0,21} = 0,458$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0,5 - (-0,1)^2 = 0,49$

$\sigma_Y = \sqrt{0,49} = 0,7$

(4)

6) $X \cdot Y$ може имати значення $-1, 0, 1$

$$\Rightarrow XY: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

XY^2 може имати значення $\Rightarrow 0$ и 1

- $X \rightarrow 0, 1$
- $Y \rightarrow -1, 0, 1$
- $Y^2 \rightarrow 0, 1$

$$XY^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Означте обе вероятности?

$$\Rightarrow XY^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$$

8) $Z = 2X + Y^2$?

1) $P(X > Y) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6$ ✓

2) $E(Y|X=1) = ?$

$$Y|_{X=1}: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$Y|_{X=1}: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,285 & 0,130 & 0,285 \end{pmatrix} \checkmark: P(X=1)$$

$E(Y|X=1) = -1 \cdot 0,285 + 0 \cdot 0,130 + 1 \cdot 0,285 = 0$ ✓

$X \cdot Y^2 = 1(-1)^2 = 1$

$XY^2 = 0$

X \ Y	0	1
1	0,1	0,2
0	0,2	0,3
1	0	0,2

$XY^2 = 1 \cdot 0 = 0$

$XY^2 = 0$

$XY^2 = 1 \cdot 1 = 1$

$$XY^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,1+0,2+0,3 & 0,2+0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow XY^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \Rightarrow X^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

6) $E(Z) = E(2X + Y^2) = 2E(X) + E(Y^2) = 2 \cdot 0,7 + 0,5 = 1,9$

$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = E((2X + Y^2)^2) - 1,9^2 = E(4X^2 + 4XY^2 + Y^4) - 1,9^2 = 4E(X^2) + 4E(XY^2) + E(Y^4) - 1,9^2 = 4 \cdot 0,7 + 4 \cdot 0,4 + 0,5 - 1,9^2 = 1,29$

$Y: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^4: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow E(Y^4) = 0,5$

2) $X \sim N(-2, 16)$ oppure $\mu = -2$

(a) $P(X \geq 2) = 0,1507$

$\sigma^2 = 16$
 $\sigma = \sqrt{16} = 4$

$1 - P(X \leq 2) =$

$1 - P\left(\frac{X - (-2)}{4} \leq \frac{2 - (-2)}{4}\right) =$

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$1 - P(X^* \leq \frac{2+2}{4}) =$

$1 - P(X^* \leq 1) =$

$1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$ ✓

$\frac{-3+2}{4} = -\frac{1}{4}$

(b) $P(|X| \geq 3) = 0,5069$

$P = 1 - P(|X| \leq 3) =$

$P = 1 - P(-3 \leq X \leq 3)$

$P = \Phi(z)$

$\frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$

$P = 1 - P\left(\frac{-3 - (-2)}{4} \leq X \leq \frac{3 - (-2)}{4}\right) =$

$P = 1 - P\left(-\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{5}{4}\right) = 1 - P(-0,25 \leq X \leq 1,25)$

$P = 1 - 0,4931$

↓

$P = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

$P = 0,5069$ ✓

$P = \Phi(1,25) - (1 - \Phi(0,25)) = -1 + \Phi(0,25)$

$P = 0,8944 - 1 + 0,5987$

$P = 0,4931 - 1$

$P = 0,4931$

4) $P(X^2 - X \leq 6) = ?$

$P(X^2 - X - 6 \leq 0) =$

$P(-2 \leq X \leq 3) =$

$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{-2 - (-2)}{4} = \frac{-2+2}{4} = 0$

$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$X_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{3 - (-2)}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$

$\Phi(0) = 0,5$

$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$P = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$

$P = \Phi(1,25) - \Phi(0)$

$X_1 = \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$P = 0,8944 - 0,5000$

$X_2 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$P = 0,3944$ ✓

$$\sigma = 4$$

$$g) P(X \leq x) = 0,9927$$

$$P\left(\frac{X - (-2)}{4} \leq \frac{x - (-2)}{4}\right) = 0,9927$$

$$P\left(X^* \leq \frac{x+2}{4}\right) = 0,9927$$

$$\Phi\left(\frac{x+2}{4}\right) = 0,9927$$

$$\frac{x+2}{4} = 2,44$$

$$x+2 = 2,44 \cdot 4$$

$$x+2 = 9,76$$

$$x = 7,76 \quad \checkmark$$

$$e) P(X \leq x) = 0,2776$$

$$P\left(\frac{X - (-2)}{4} \leq \frac{x - (-2)}{4}\right) = 0,2776$$

$$P\left(\frac{x+2}{4} \leq \frac{x+2}{4}\right) = 0,2776$$

$$P(X^* \leq \frac{x+2}{4}) = 0,2776$$

$$\Phi\left(\frac{x+2}{4}\right) = 1 - (1 - 0,2776)$$

$$\frac{x+2}{4} = 1 - 0,7224$$

$$\rightarrow P = 1 - \Phi(z)$$

$$\frac{x+2}{4} = \Phi(-0,7224)$$

$$\Phi(-z)$$

$$\frac{x+2}{4} = -0,59$$

$$x+2 = -0,59 \cdot 4$$

$$x+2 = -2,36$$

$$x = -2,36 - 2$$

$$x = -4,36 \quad \checkmark$$

17

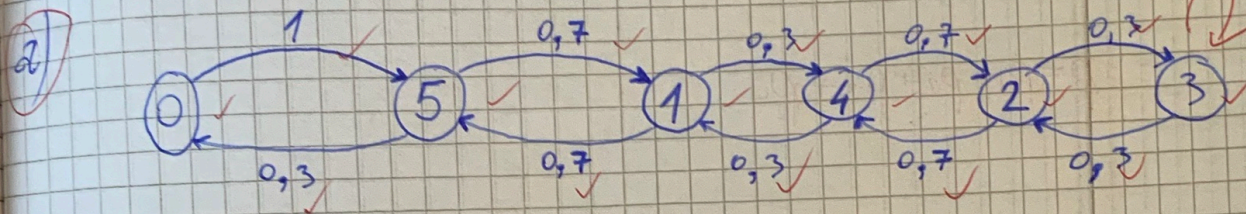
$P = \Phi(z)$

3) Никола има 5 парчи наочара (неке код куће, неке у канц.)

Вероватноћа да ће бити сунчано $\rightarrow p = 0,7$

Сваком стању одговара број парчи наочара који се налазе на локацији где је Никола тренутно.

\Rightarrow дакле 0 -та да неће бити сунчано $\rightarrow p = 0,3$



6) Ако Никола почне из стања 5; која 0 -та је да ће Николи остати 2 прелазна стањима сунце.

Сунце му може остати само у случају прелазна

из стања 0 у стање 5 \Rightarrow само када не може да понесе наочаре; дакле $p = 0,3$ да ће му остати сунце.

8) Ако Никола почне са локацијом 4 парчи наочара; која је 0 -та да ће остати 4 прелазна Никола само 1 остати без наочара.

~~13~~ = 13

$$P_1(4 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 5) =$$

или 4×4

$$= 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,1029$$

$$p_2(4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3) = 0,3 \cdot (0,7)^3 = 0,1029$$

$$p_{uk} = p_1 + p_2 = \boxed{0,2058}$$

$$p_3(4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3)$$

$$p_4(4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 5)$$

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$