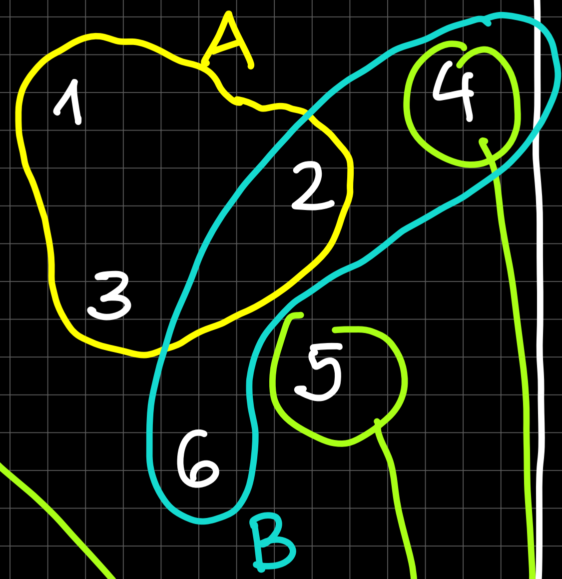
# Основни појмови теорије вероватноће

ДЕФ: ... случајног експеримента..

- унапред је деф. шта пратимо

| Где је пала коцкица? | Који је број пао на коцкици? | Колики је модул при дељењу са 2? |
|---|---|---|
| сто | | 0 |
| под | | 1 |




- познати су сви могући исходи
- може се понављати произвољан број пута
- исход појединачног експеримента није познат

ЕЛЕМЕНТАРНИ ИСХОД.. под, 5, 4, 1, ...

СКУП СВИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДОГАЂАЈА:

$E$ (или $\Omega$)

$E = \{\text{сто}, \text{под}\}$

$E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_3 = \{0, 1\}$

СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈ је... $A, A_1, A_2, B, C \ldots$

$A=$ "пао је број мањи од 4"
$B=$ "пао је паран број"

.... РЕАЛИЗОВАО (ОСТВАРИО)...
.... СИГУРАН ... $A=E$

$C=$ "пао је број мањи од 7"
да ли је $C=E_2$? $\Rightarrow$ $C$ сигуран!

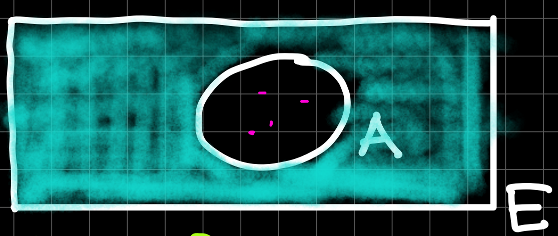
.... НЕМОГУЋ ДОГАЂАЈ.

$D=$ "пао је број дељив са 8"
$D=\emptyset$

# АЛГЕБРА ДОГАЂАЈА

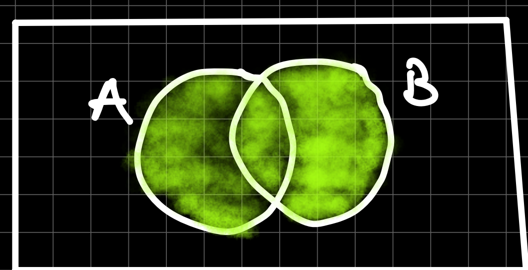
ДЕФ: СУПРОТАН ДОГАЂАЈ $S$ .. $A$

$S=A^c$
$S=\bar{A}$



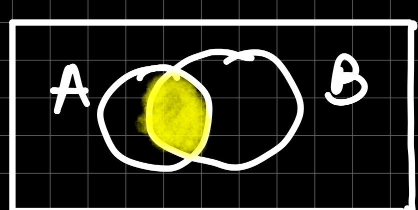

ДЕФ: УНИЈА $A$ и $B$ .. $C$

$C=A\cup B$




ДЕФ: ПРЕСЕК ДОГ. $A$ и $B$ .. $D$

$D=A\cap B$
$D=AB$

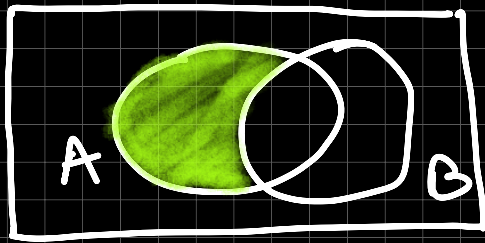


ДЕФ: Реализује се A, али не и B, .. РАЗЛИКУ..

$A \setminus B$

↑

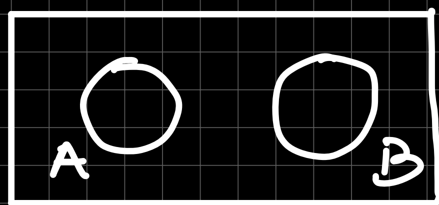
није исто што и $A | B$.




$$A \cup \bar{A} = E$$
$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

ДЕФ: ... УЗАЈАМНО ИСКЉУЧИВИ (ДИСЈУНКТНИ)...

$AB = \emptyset$




пример: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A =$ "пао је број већи од 3" $\quad A = \{4,5,6\}$

$B =$ "пао је паран број" $\quad B = \{2,4,6\}$

$$A \cup B = \{2,4,5,6\}$$
$$A \cap B = \{4,6\}$$
$$A \setminus B = \{5\}$$
$$B \setminus A = \{2\}$$
$$A^c = \{1,2,3\}$$

ДЕ-МОРГАНОВА ПРАВИЛА:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

# АКСИОМЕ ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

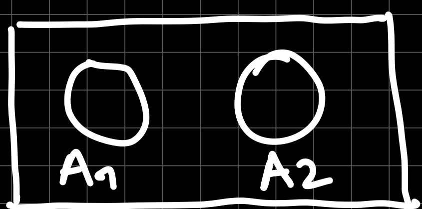
ДЕФ. ... E. Ф-ја P деф. на подскуповима од E,

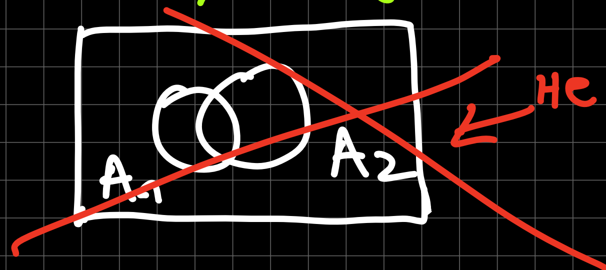
a1) НЕНЕГАТИВНОСТ: $P(A)\geq 0,\ \forall A\subset E$

a2) НОРМИРАНОСТ: $P(E)=1$

a3) АДИТИВНОСТ:

$A_1, A_2\subset E,\quad A_1A_2=\emptyset \Rightarrow P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$




не важи а3!

$$A_i\cdot A_j=\emptyset,\ \forall i,j \Rightarrow P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

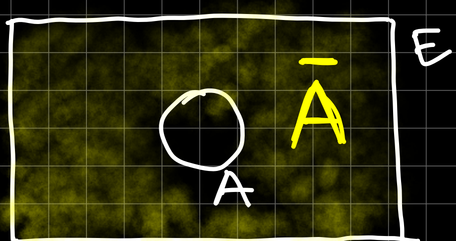
КОНАЧНА АДИТИВНОСТ

# ОСОБИНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

$$A\subset E,\quad P(A)\to[0,1]$$

T1: .... $P(\bar{A})=1-P(A)$

доказ:




$A\cup\bar{A}=E$, $A\cap\bar{A}=\emptyset$

a3 ... a3

$$1 = P(E) = P(A\cup\bar{A}) = P(A)+P(\bar{A})$$

$A_1A_2=\emptyset \Rightarrow P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$

$\Rightarrow P(A)+P(\bar{A})=1$

$\Leftrightarrow \quad P(\bar{A})=1-P(A)$

T2. . . $P(\emptyset) = 0$

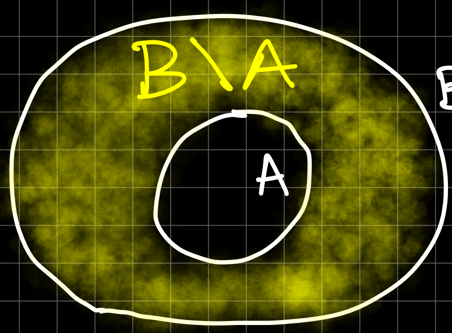
$E = E \cup \emptyset \quad , \quad E \cap \emptyset = \emptyset$

$$1 = P(E) = P(E \cup \emptyset) \overset{a3}{=} \underbrace{P(E)}_{=1} + P(\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 1 + P(\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(\emptyset) = 0$$

T3: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$




$(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ по деф

$(B \setminus A) \cup A = B$

$$P(B) = P((B \setminus A) \cup A) \overset{a3}{=} P(B \setminus A) + P(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0 \ (a1)} = P(B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$$

T4: $\underbrace{0 \leq P(A)}_{a1} \leq 1$

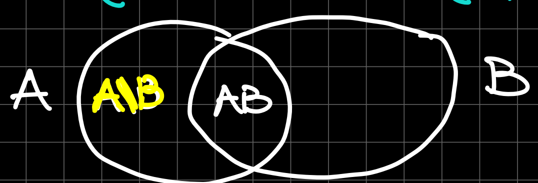
доказаћемо само: $P(A) \leq 1$

примењујемо T3 на скупове $A$ и $E$

$$A \subseteq E \Rightarrow P(A) \leq P(E)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(A) \leq 1$$

T5: $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$



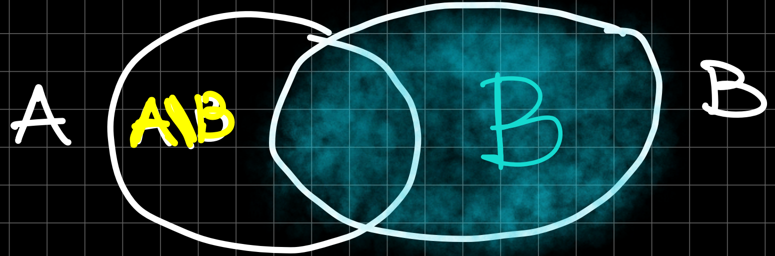
$(A\setminus B)\cap(AB)=\emptyset, \quad (A\setminus B)\cup(AB)=A$

$P(A)=P\big((A\setminus B)\cup(AB)\big)\overset{a3}{=}P(A\setminus B)+P(AB)$

$\Leftrightarrow \quad P(A\setminus B)=P(A)-P(AB)$

до ове а3)

T6: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$




$(A\setminus B)\cap B=\emptyset$

$P(A\cup B)=P\big((A\setminus B)\cup B\big)\overset{a3}{=}P(A\setminus B)+P(B)$

као унију два дисјункта

T5 $\big(P(A\setminus B)=P(A)-P(AB)\big)$

$P(A\cup B)=P(A)-P(AB)+P(B)$

# ДЕФИНИЦИЈЕ ВЕРОВАТ.

1. већ виђена: АКСИОМАТСКА ДЕФ. ВЕР.

## СТАТИТИСТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВ.

ДЕФ: ... $m$ ... $A$ ... у $n$ ...

$\frac{m}{n}$ ← релативна фреквенција.

$P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}$ – СТАТИСТИЧКА ДЕФ. ВЕРОВ.

# КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ (ЛАПЛАСОВА)

ДЕФ. $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .. ЈЕДНАКО ВЕРОВАТНИХ

$m$ (од свих $n$) ?

$$P(A)=\frac{\text{број повољних исхода}}{\text{број свих могућих исхода}}=\frac{m}{n}$$ ЛАПЛАСОВА ДЕФ. ВЕРОВАТНОЋЕ

пример: Имамо 12 куглица: 3Б, 4Ц, 5С.
Извлачимо 1 куглицу.

A = "извлачење црне куглице"
B = "извлачење беле куглице"
C = "извлачење сиве"

a) $P(A)=?$ $m=4$, $n=3+4+5=12$

$$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

b) $P(\bar{A})=?$ I начин: $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\bar{A}=B\cup C$ $B\cap C=\emptyset$

$$P(\bar{A})=P(B\cup C)\overset{\text{А3}}{=}P(B)+P(C)=\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

# ГЕОМЕТРИЈСКА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

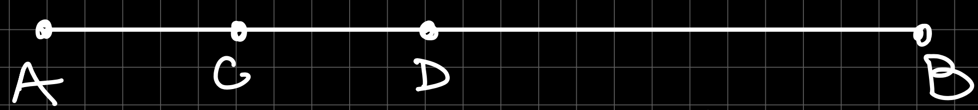
ДЕФ: ... E ..

"мера"

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)},$$ — ГЕОМЕТРИЈСКА ДЕФ. ВЕРОВАТНОЋЕ

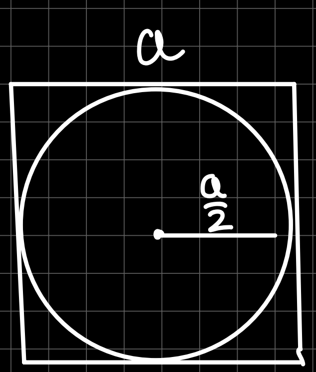
где је $m$ дужина (или површина или запремина)

пример: ..AB и тачке C и D које припадају тој дужи. На случајан начин се бира тачка N на дужи AB. Која је вероватноћа да она припада и дужи CD?




$$p = \frac{d(CD)}{d(AB)} = \ldots$$

пример: Колика је $p$ да се приликом случајног избора једне тачке из квадрата стр. $a$, та тачка налази и у кругу уписаном у квадрат?




$$p = \frac{P(\bigcirc)}{P(\square)} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi}{a^2} = \frac{a^2\pi}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$$