REDOVNI ROK, 2 DEO ISPITA, 21.02.2026.

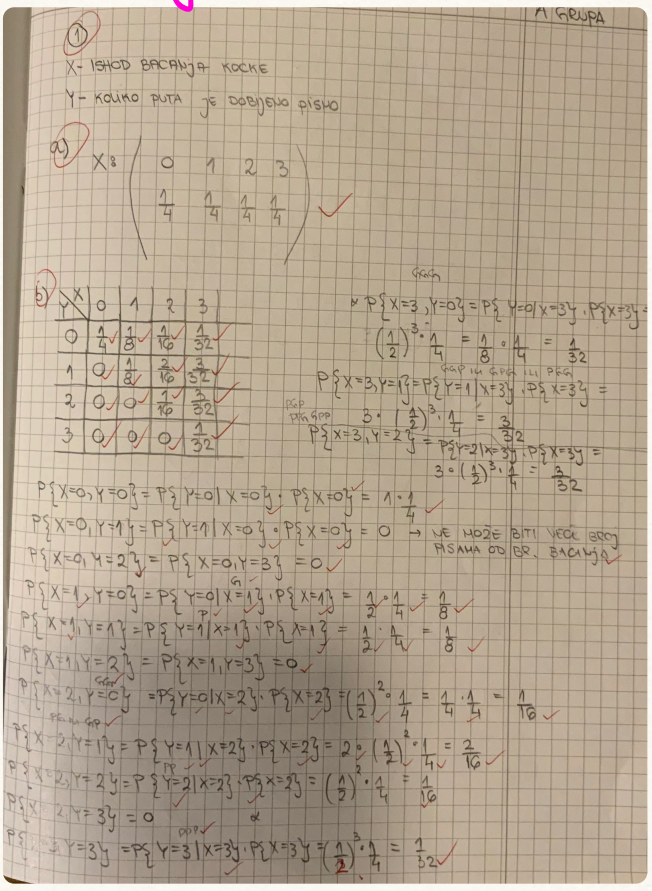
Drugi deo ispita iz Matematičke obrade eksperimentalnih podataka na TMF-u u Beogradu, Redovni rok **A grupa**

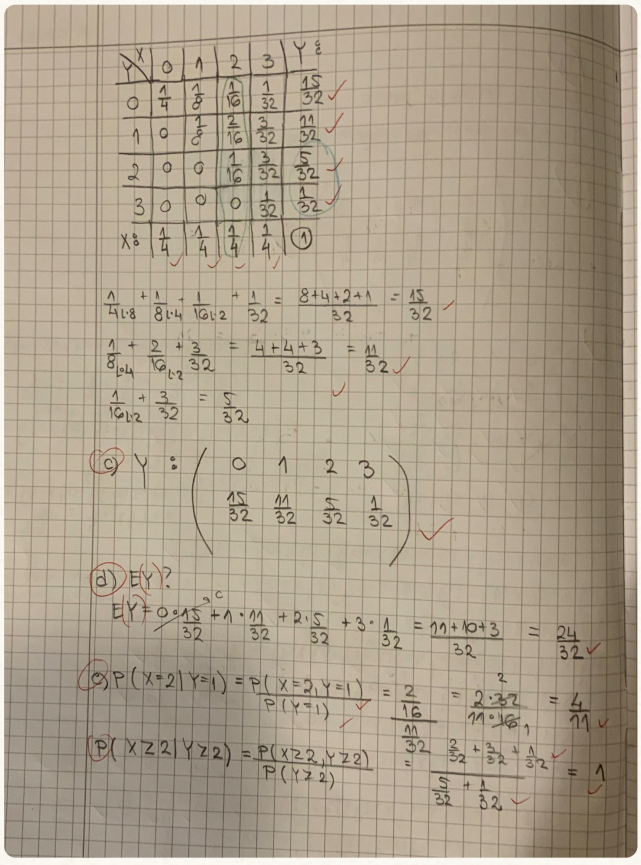
1. Četvorostrana pravilna "kocka" sa oznakama *0,1,2* i *3* se baca jedanput. Rezultat koji se dobije odredjuje koliko ćemo puta bacati novčić. Neka je X slučajna veličina koja označava ishod bacanja kockice, a Y slučajna veličina koja označava koliko puta je dobijeno pismo prilikom bacanja novčića. Odrediti:
   a) [1] jednodimenzionu raspodelu slučajne promenljive X
   b) [5] dvodimenzionu raspodelu slučajne promenljive (X, Y) i upisati u tabelu sve $p_{X,Y}(x, y)$.
   c) [2] jednodimenzionu raspodelu slučajne promenljive Y
   d) [2] $E(Y)$.
   e) [3] $P(X = 2|Y = 1)$ i $P(X \geq 2|Y \geq 2)$
   f) [3] $E(X|Y = 1)$.
   g) [3] $E(Y|X = 2)$.

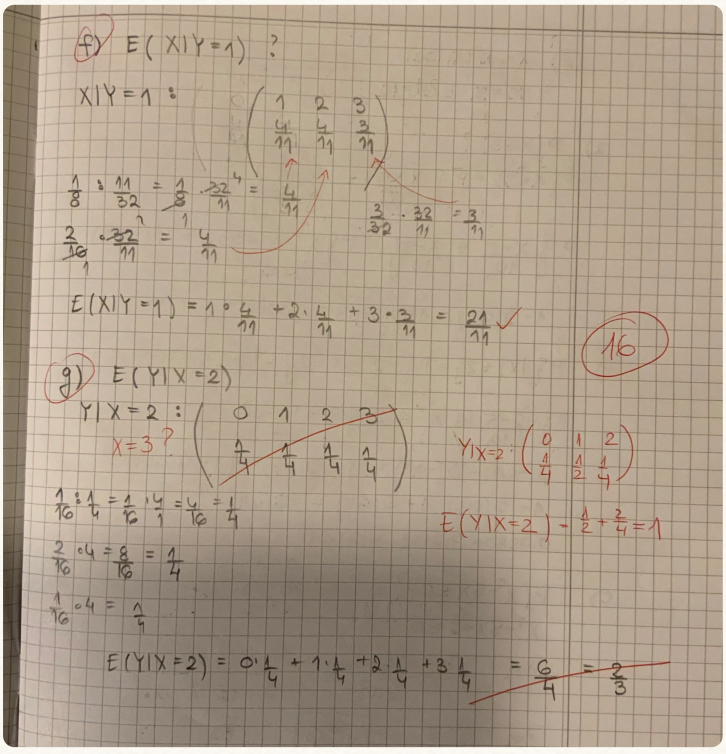
2. Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $X \sim N(5, 100)$, odrediti:
   a) [3] $P(X \leq 3)$?
   b) [4] $P(|X| \leq 2)$?
   c) [4] $P(X^2 - 5X \leq 6)$?
   d) [3] Odrediti x takvo da je $P(X \leq x) = 0.8023$.
   e) [4] Odrediti x takvo da je $P(X \leq x) = 0.1446$.

3. Dva igrača, A i B, igraju duel u slobodnim bacanjima. U svakoj rundi oba igrača šutiraju po jedno slobodno bacanje (nezavisno jedno od drugog). A pogadja svoje bacanje sa verovatnoćom p, B pogadja svoje bacanje sa verovatnoćom q. Poeni se dodeljuju po sledećem pravilu: ako jedan igrač pogodi, a drugi promaši u toj rundi, tada igrač koji je pogodio dobija 1 poen u toj rundi. U ostalim slučajevima niko ne osvaja poen (rezultat se ne menja). Igra se završava kada jedan igrač stekne prednost od 2 poena. Neka stanje bude razlika rezultata nakon svake runde: $X_n = (poeni A) - (poeni B)$
   a) [2] Koja stanja će biti završna?
   b) [5] Opisati Markovljevim procesom ovu igru (odrediti sva stanja, prelaske, kao i njihove verovatnoće).
   c) [6] Odrediti verovatnoću da A pobedi najkasnije do kraja četvrte runde.

REŠENJA STUDENATA:







2 $X \sim N(5, 100)$

$\mu = 5$

$b = 10 = \sqrt{100}$ $\rightarrow X^* \sim N(0,1)$

a) $P(X \leq 3) = P\left(\frac{X-5}{10} \leq \frac{3-5}{10}\right) = P\left(X^* \leq -\frac{2}{10}\right) = P(X^* \leq -0{,}2) =$

$= F(-0{,}2) = 1 - F(0{,}2) = 1 - 0{,}5793 = 0{,}4207$ ✓

b) $P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = P\left(\frac{-2-5}{10} \leq \frac{X-5}{10} \leq \frac{2-5}{10}\right) =$

$= P\left(-\frac{7}{10} \leq X^* \leq -\frac{3}{10}\right) = P(-0{,}7 \leq X^* \leq -0{,}3) =$

$= F(-0{,}3) - F(-0{,}7) = 1 - F(0{,}3) - (1 - F(0{,}7)) =$

$= 1 - F(0{,}3) - 1 + F(0{,}7) = F(0{,}7) - F(0{,}3) = 0{,}7580 - 0{,}6179 =$

$= 0{,}1401$

c) $P(x^2-5x \le 6) = P(x^2-5x-6 \le 0)$

$(x-2)(x+3) = x^2-2x-3x+6 = x^2-5x+6$

$(x-6)(x+1) = x^2-6x+x-6 =$

$= x^2-5x-6$

$(x-6)(x+1)=0$

$x_1 = 6$

$x_2 = -1$

$x^2-5x-6 \le 0$

$-1 \le x \le 6$

$P(-1 \le X \le 6) = P\left(\frac{-1-5}{10} \le \frac{X-5}{10} \le \frac{6-5}{10}\right) = P\left(-\frac{6}{10} \le x^* \le \frac{1}{10}\right) =$

$= P(-0{,}6 \le x^* \le 0{,}1) = F(0{,}1) - F(-0{,}6) = F(0{,}1) - 1 + F(0{,}6)$

$= 0{,}53983 - 1 + 0{,}72575 = 0{,}26558$ ✓

d) $x = ?$ $P(X \le x) = 0{,}8023$

$P\left(\frac{X-5}{10} \le \frac{x-5}{10}\right) = P\left(x^* \le \frac{x-5}{10}\right) = F\left(\frac{x-5}{10}\right) = 0{,}8023$

$\frac{x-5}{10} = 0{,}85$

$x-5 = 8{,}5$

$x = 13{,}5$

e) $x = ?$ $P(X \le x) = 0{,}14466$

$P\left(x^* \le \frac{x-5}{10}\right) = 0{,}14466$

$F\left(\frac{x-5}{10}\right) = 0{,}14466$

$1 - F\left(\frac{x-5}{10}\right) = 1 - 0{,}14466$

$F\left(\frac{5-x}{10}\right) = 0{,}8554$

$\frac{5-x}{10} = 1{,}06$

$5-x = 10{,}6$

$x = 5-10{,}6 = -5{,}6$

(3) a) ZAVRŠNA STANJA SU (-2) – STANDE U KOM IGRAČ B IMA PREDNOST OD 2 POENA

(2) – STANDE U KOM IGRAČ A IMA PREDNOST OD 2 POENA

$P(A \text{ pogodio}) = p$ $P(A \text{ promašio}) = 1-p$

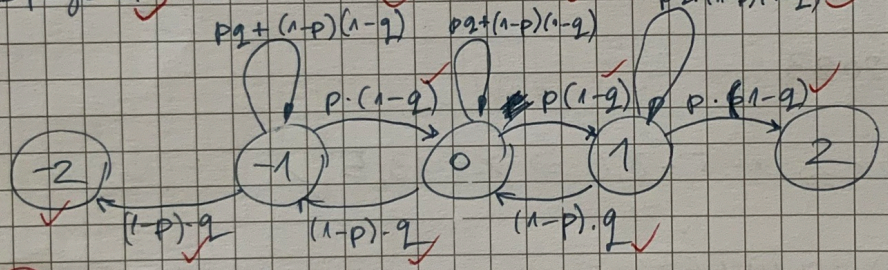
$P(B \text{ pogodio}) = q$ $P(B \text{ promašio}) = 1-q$

A pogodi, B promaši $\Rightarrow$ A dobija poen, sističe iz st. npr (0) u (1) $\Rightarrow P = p\cdot(1-q)$
(0) nerešeno, (1) A ima predmost 1

A promaši, B promaši $\Rightarrow$ ostaje isto, $P = (1-p)(1-q)$

A pogodi, B pogodi $\Rightarrow$ — " — $P = p\cdot q$

A promaši, B pogodi $\Rightarrow$ B dobija poen, sist iz (0) u (-1) $P = (1-p)\cdot q$



c) Verovatnoća da se stigne iz (0) u (2) u najviše 4 koraka

$P = P(0-0-0-1-2) + P(0-1-1-1-2) + P(0-1-2) +$
$+ P(0-0-1-2) + P(0-1-1-2) + P(0-1-0-1-2) +$
$+ P(0-0-1-1-2) + P(0-(-1)-0-1-2) =$

(13)

$= (pq+(1-p)(1-q))^2 \cdot (p(1-q))^2 + (p(1-q))^2 \cdot ((pq+(1-p)(1-q))^2 + (p(1-q))^2 +$
$+ (pq+(1-p)(1-q)) \cdot (p(1-q))^2 + (p(1-q))^2 \cdot (pq+(1-p)(1-q)) +$
$+ (p(1-q))^3 \cdot (1-p)\cdot q + (pq+(1-p)(1-q))^2 \cdot (p(1-q))^2 + (1-p)\cdot q \cdot p(1-q) \cdot (p(1-q))^2$
$3(pq+(1-p)(1-q))^2 \cdot ((p(1-q))^2 + (p(1-q))^2 (1 + 2pq(1-p)(1-q)) +$
$+ (p(1-q))^3 (2\cdot(1-p)\cdot q)$

$(2\cdot(1-p)\cdot q)$