

PRVI DEO ISPITA U REDOVNOM ROKU - 23.01.2026.

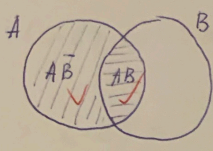
Prvi deo ispita iz Matematičke obrade eksperimentalnih podataka na TMF-u u Beogradu Redovni rok 2025 A grupa

- Događjaji A i B su nezavisni.
 - 4 Navesti dve jednakosti koje najčešće koristimo za definiciju nezavisnosti događaja A i B.
 - 8 Da li su događjaji A i \bar{B} nezavisni? Dokazati.
- Radnik ide svaki dan na posao autobusom, tramvajem ili biciklom. U 50% slučajeva se opredeljuje za autobus, u 20% posto slučajeva za tramvaj, i u 30% slučajeva za bicikl. Verovatnoća da će zbog kašnjenja autobusa zakasniti na posao je 0.05, u slučaju izbora tramvaja ta verovatnoća iznosi 0.1, a biciklom kasni sa verovatnoćom 0.01.
 - 5 Izračunati verovatnoću sa kojom radnik kasni na posao.
 - 6 Ako je radnik zakasnio na posao, koliko iznosi verovatnoća da je on na posao išao autobusom?
- U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 2 i dve kuglice označene brojem 3. Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.
 - 5 Naći zakon raspodele slučajne promenljive X
 - 2 Izračunati $E(X)$.
 - 3 Ako je A događaj da je zbir izvučenih brojeva barem 4, izračunati $E(X|A)$.
 - 4 Naći funkciju raspodele, $F_X(x)$, za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.
- Neka su X_i , $1 \leq i \leq 3$ nezavisne Bernulijeve slučajne veličine sa raspodelom $X_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Ako je $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ odrediti:
 - 4 $P(X = 0)$
 - 4 $P(X_3 = 1 | X = 0)$
 - 5 $E(X_3 | X = 0)$.

(1) (a) $P(A|B) = P(A)$ ✓
 ili $P(B|A) = P(B)$ ✓
 i $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ✓

(b) $P(A\bar{B}) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(\bar{B})$ ✓

$A = AB \cup A\bar{B}$ ✓
 $AB \cap A\bar{B} = \emptyset \Rightarrow$ disjunktne su ✓
 \rightarrow primena (a3) ✓

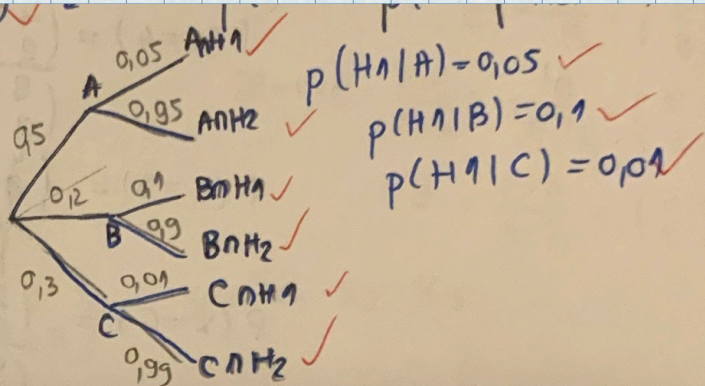


$\Rightarrow P(AB \cup A\bar{B}) = P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ ✓
 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ ✓
 ~~$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$~~
 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$ ✓
 $\hookrightarrow A$ i B su nezavisni ✓
 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B)$ ✓
 $P(A\bar{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B))$ ✓
 $P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \Rightarrow$ Događjaji A i \bar{B} jesu nezavisni ✓

u prilogu su
 rešenja studenata
 koji su ispravno
 rešili zadatke

- ② $A = \text{autobus}$, $p(A) = 0,5$
 $B = \text{tramvaj}$, $p(B) = 0,2$
 $C = \text{bicikl}$, $p(C) = 0,3$

$H_1 = \text{kasni}$
 $H_2 = \text{nekasni}$



$p(H_1|A) = 0,05$

$p(H_1|B) = 0,1$

$p(H_1|C) = 0,01$

a) $p(H_1) = ?$

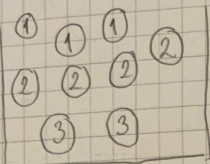
$p(H_1) = p(A) \times p(H_1|A) + p(B) \times p(H_1|B) + p(C) \times p(H_1|C)$

$p(H_1) = 0,5 \times 0,05 + 0,2 \times 0,1 + 0,3 \times 0,01 = 0,025 + 0,02 + 0,003 = 0,048$

b) $p(A|H_1) = ?$

$p(A|H_1) = \frac{p(A \cap H_1)}{p(H_1)} = \frac{p(A) \times p(H_1|A)}{p(H_1)} = \frac{0,5 \times 0,05}{0,048} = \frac{0,025}{0,048} = 0,5208$

③ izvlačenje 2 kuglice



a) $X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

↓
 Zbir izvlačenih brojeva

- 2 = 1+1 ✓
- 3 = 1+2 ✓
- 4 = 3+1 ✓, 2+2 ✓
- 5 = 3+2 ✓
- 6 = 3+3 ✓

$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{9 \cdot 8} = \frac{1}{12}$

$P(X=3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{1}{3}$

$P(X=4) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + 3 \cdot 2}{\frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2} + 6}{\frac{9 \cdot 8}{2}}$

$= \frac{\frac{12}{2} + \frac{12}{2}}{\frac{9 \cdot 8}{2}} = \frac{\frac{24}{2}}{\frac{9 \cdot 8}{2}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$P(X=5) = \frac{\binom{2}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{2}{9}$

$$P(X=6) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \checkmark$$

X:	2	3	4	5	6
	$\frac{3}{36} \checkmark$	$\frac{12}{36} \checkmark$	$\frac{12}{36} \checkmark$	$\frac{8}{36} \checkmark$	$\frac{1}{36} \checkmark$

Zakon raspodele

(b) $E(X) = ?$

$$E(X) = \frac{1}{36} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 12 + 8 \cdot 8 + 6) = \frac{136}{36} = 3,77 \checkmark$$

(c) A = "zbir iznucnih brojeva barem 4"

$E(X|A) = ?$

X A:	4	5	6
	$\frac{12}{21} \checkmark$	$\frac{8}{21} \checkmark$	$\frac{1}{21} \checkmark$

$$P(X=4|A) = \frac{P(X=4, A)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{21}{36}} = \frac{12}{21} \checkmark$$

$$P(A) = \frac{12}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{21}{36} \checkmark$$

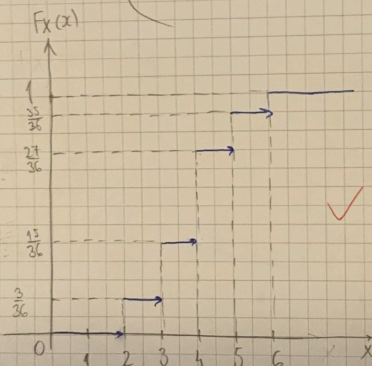
$$P\{X=5|A\} = \frac{P\{X=5, A\}}{P(A)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{21}{36}} = \frac{8}{21} \checkmark$$

$$P\{X=6|A\} = 1 - P\{X=5|A\} - P\{X=4|A\} = 1 - \frac{8}{21} - \frac{12}{21} = \frac{1}{21} \checkmark$$

$$E(X|A) = \frac{1}{21} (4 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 6) = \frac{94}{21} = 4,476 \checkmark$$

d)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \checkmark \\ \frac{3}{36}, & 2 \leq x < 3 \checkmark \\ \frac{15}{36} \checkmark, & 3 \leq x < 4 \checkmark \\ \frac{27}{36} \checkmark, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{35}{36} \checkmark, & 5 \leq x < 6 \checkmark \\ 1, & x \geq 6 \checkmark \end{cases}$$



(4) $x_i, 1 \leq i \leq 3$ $x_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \checkmark$ $X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$

a) $P(X=0) = ?$ $P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1 - P('111')$ \checkmark

$$P(X=0) = 1 - 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 1 - 0,008 = 0,992$$

b) $P(X_3=1 | X=0) = \frac{P(X_3=1 \cap X=0)}{P(X=0)} = \frac{P(001) + P(101) + P(011)}{P(X=0)}$ \checkmark

$$= \frac{0,8^2 \times 0,2 + 2 \times 0,2^2 \times 0,8}{0,992} = \frac{0,128 + 0,064}{0,992} = \frac{0,192}{0,992} = 0,1935 \checkmark$$

(c) $E(X_3 | X=0) = ?$ $X_3 | X=0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,8065 & 0,1935 \end{pmatrix} \checkmark$

$$1 - 0,1935 = 0,8065 \checkmark$$

$$E(X_3 | X=0) = 0 \times 0,8065 + 1 \times 0,1935 = 0,1935 \checkmark$$

Moguci ishodi: 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000