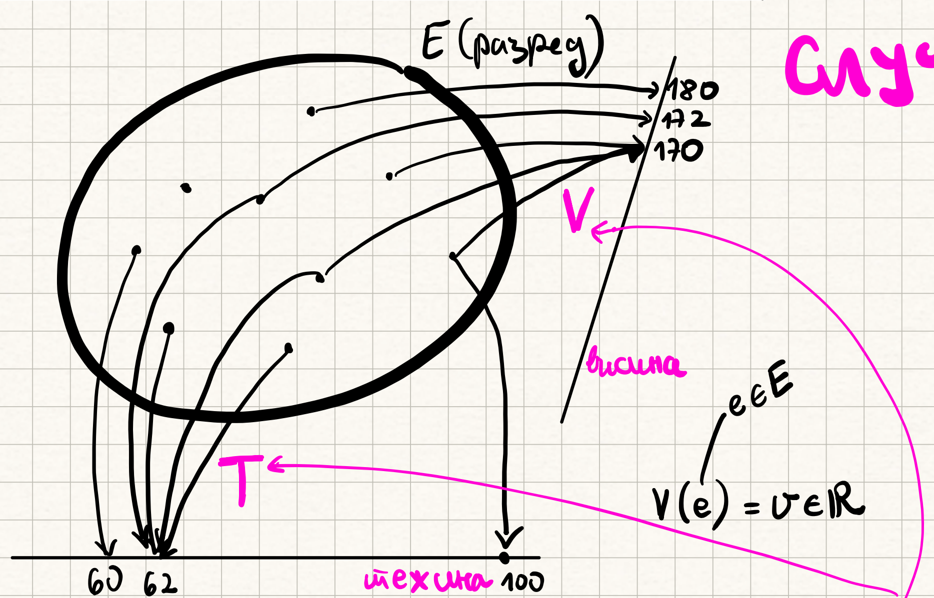
15.12.2025.

## Random variables

- An assignment of a value (number) to every possible outcome
- Mathematically: A function from the sample space $\Omega$ to the real numbers
  - discrete or continuous values
- Can have several random variables defined on the same sample space
- Notation:
  - random variable $X$
  - numerical value $x$

# СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ




један експ. може имати придр. више сл. вел.

ДЕФ: ф-ја која пр. скуп E... СЛУЧАЈНА ВЕЛИЧИНА (СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА)

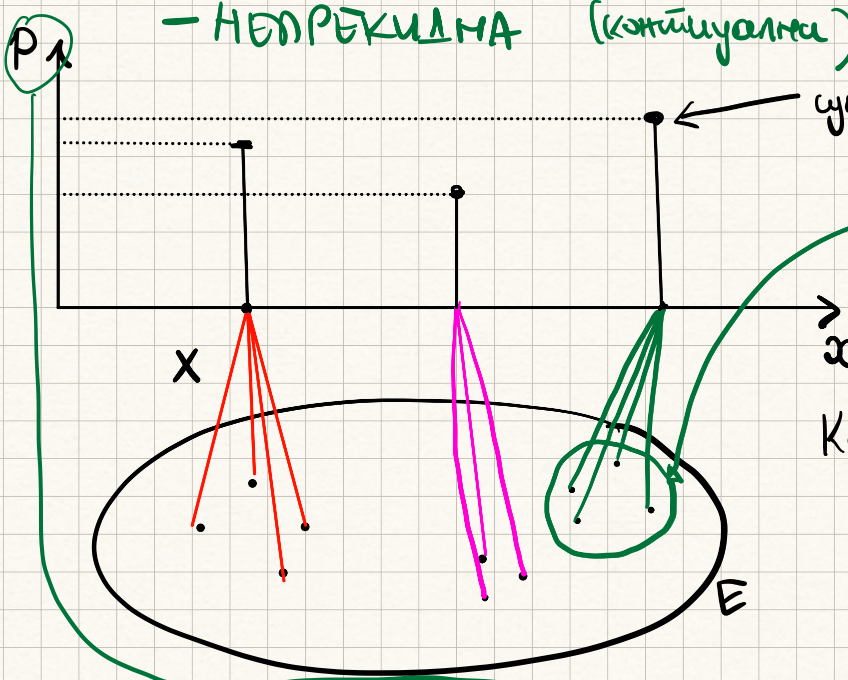
$$X: E \to \mathbb{R}$$

$$X(e) = x$$

велико сл. мало слово

- ДИСКРЕТНА (заокружимо нпр. висину на целе центиметре)

- НЕПРЕКИДНА (континуална)




сума вероватноћа за све елементе овог догађаја

$X(e) = x$

Која је вероватноћа да случајна величина узме неку вредност?

дефиниција ове ф-је $p$

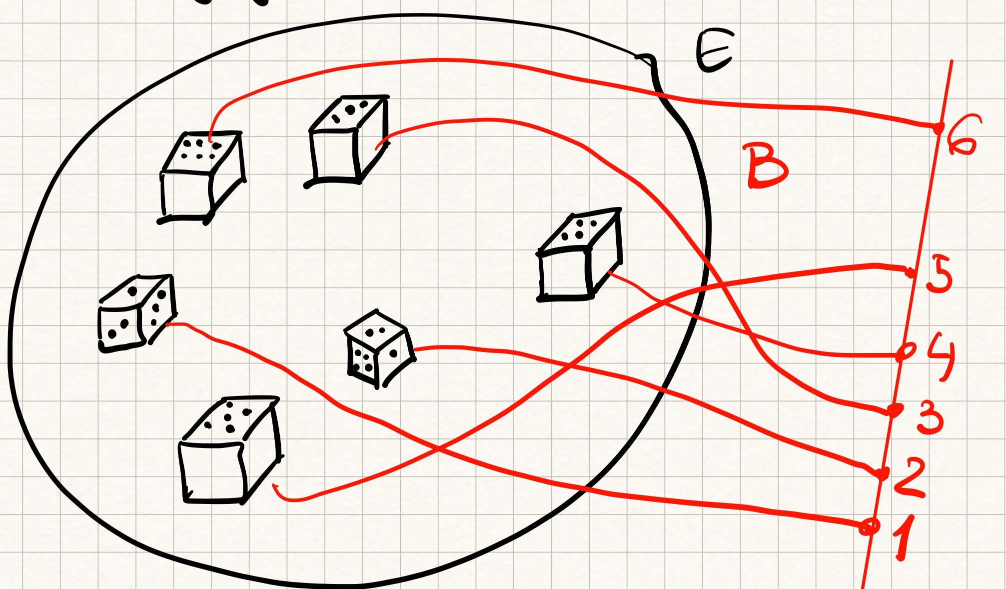
**Probability mass function (PMF)**

- ("probability law", "probability distribution" of $X$)
- Notation:
$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ s.t. } X(\omega) = x\})$$

особине:

- $p_X(x) \geq 0 \qquad \sum_x p_X(x) = 1$
- **Example:** $X$=number of coin tosses until first head
  - assume independent tosses, $\mathbf{P}(H) = p > 0$
$$p_X(k) = \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(TT \cdots TH) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
  - **geometric** PMF

1. Пример Коцка за игру се баца 1x и резултат се може описати сл. случајном величином:

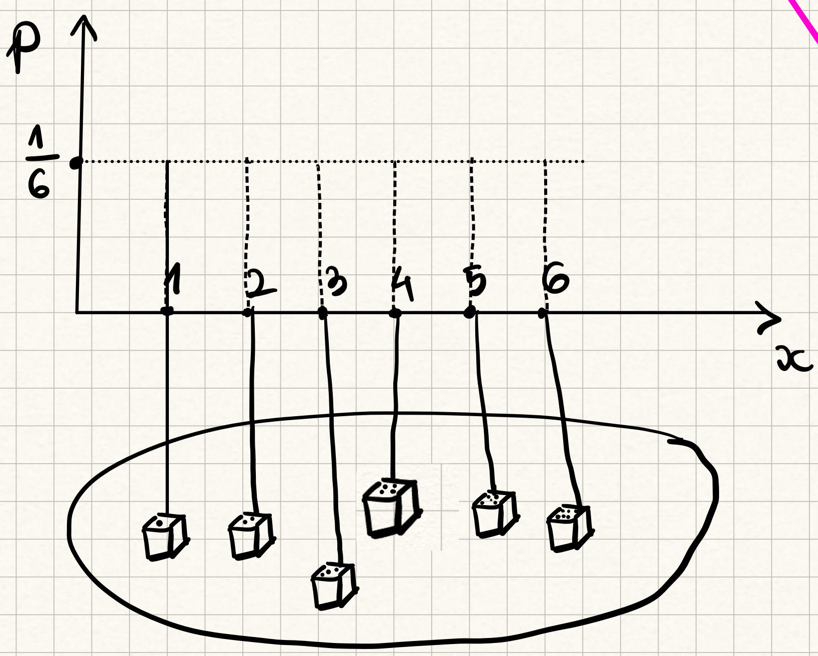



$$B : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

← све могуће вредности које сл. вел. може да узме

$P(B=1)$

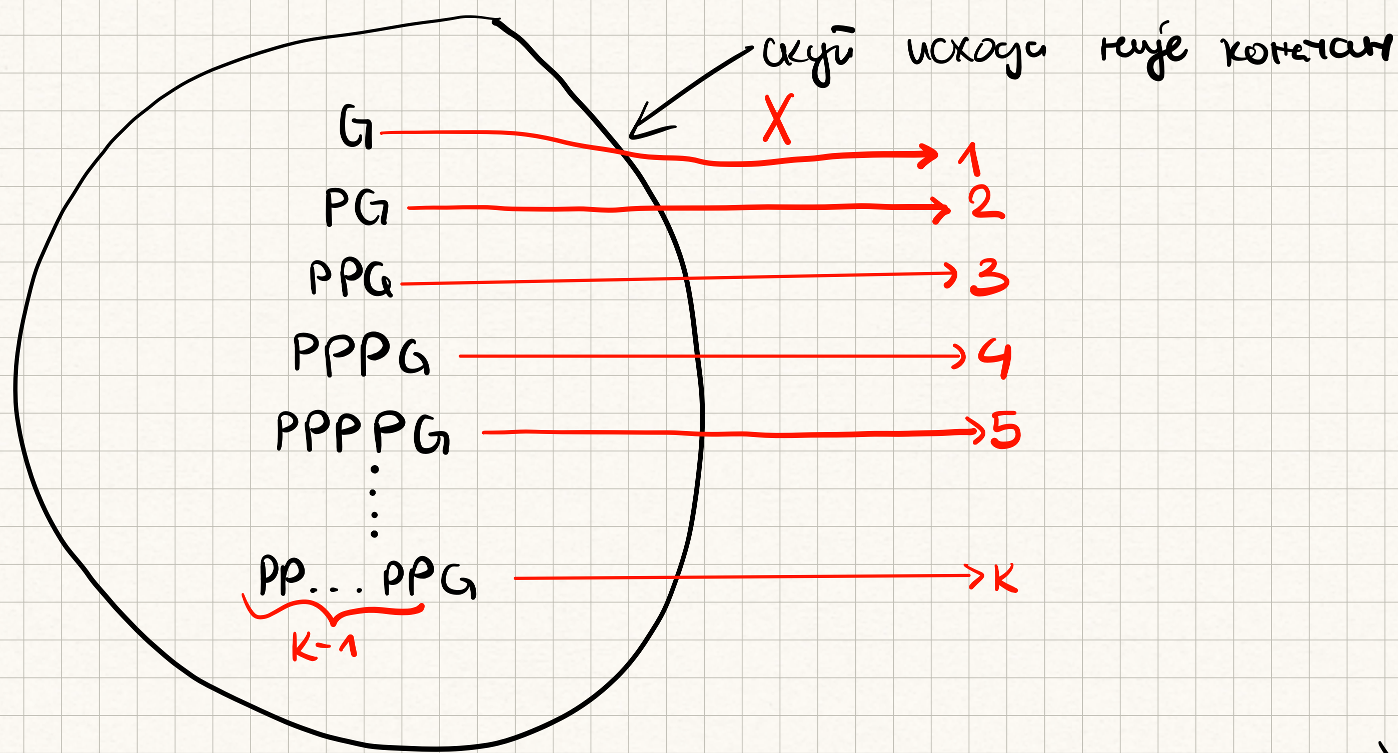
вероватноћа да сл. вел. узме торију вредност




Овим описујемо РАСПОДЕЛУ ВЕРОВАТНОЋА сл. величине X

пример: Нека је X сл. вел. која описује број бацања новчића до појаве прве главе. Описати расподелу верова. сл. вел. X. Вероватноћа $P(G)=p>0$

1. Скуп могућих исхода?




$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ p & (1-p)p & (1-p)^2 \cdot p & & & (1-p)^{k-1} \cdot p & \end{pmatrix}$$

$$P(X=1) = P(\text{"G"}) = p$$
$$P(X=2) = P(\text{"PG"}) = (1-p)p$$
$$P(X=3) = P(\text{"PPG"}) = (1-p)^2 \cdot p$$
$$\vdots$$
$$P(X=k) = P(\text{"}\underbrace{PP\ldots P}_{k-1}G\text{"}) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & k & \ldots \\ p & (1-p)p & (1-p)^2 \cdot p & & & (1-p)^{k-1} \cdot p & \end{pmatrix}$$

**ГЕОМЕТРИЈСКА РАСПОДЕЛА**

$$X \sim G(p)$$

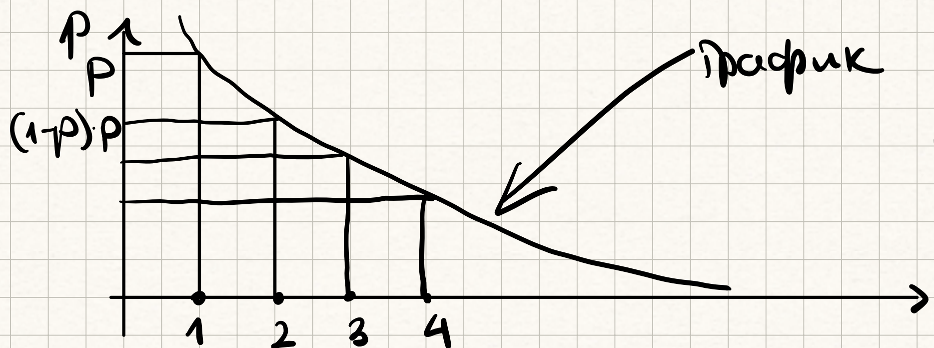



График опада наниже правцем геом. прогресије

**БЕРНУЛИЈЕВ ЕКСПЕРИМЕНТ** је.. са <u>два</u> могућа исхода

**ГЕОМЕТР. РАСПОДЕЛА:** Берн. експ. са вероватноћом успеха $p$ се изводе до првог успеха.
Случајна величина која описује број понављања експер. има ГЕОМЕТРИЈСКУ РАСПОДЕЛУ.

$$X \sim G(p)$$

## How to compute a PMF $p_X(x)$

- collect all possible outcomes for which $X$ is equal to $x$
- add their probabilities
- repeat for all $x$

- **Example:** Two independent rools of a fair tetrahedral die

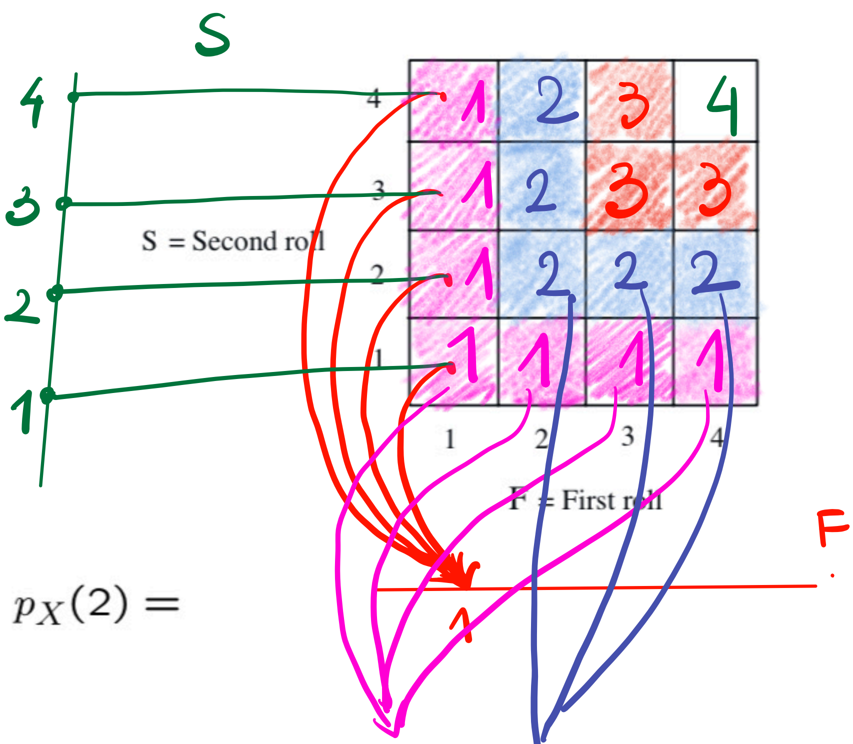
$F$: outcome of first throw
$S$: outcome of second throw
$X = \min(F, S)$

$$F: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$p(F=1)$

$$S: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

применимо
$F(2)=1$
$S(2)=2$




$p_X(2) =$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7\cdot\frac{1}{16} & 5\cdot\frac{1}{16} & 3\cdot\frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Проверимо $\Sigma = 1$? $\frac{7+5+3+1}{16} = \frac{16}{16} = 1$ ✓

# БИНОМНА РАСПОДЕЛА

Берн. експ. са вероватноћом успеха $p$ се изводе $n$ пута.
Сл. величина која описује БРОЈ УСПЕХА у ових $n$ извођења има БИНОМНУ РАСПОДЕЛУ.

### Binomial PMF

- $X$: number of heads in $n$ independent coin tosses

Практично као изгледа расподела вероватноћа за $X$?

- $\mathbf{P}(H) = p$ – вероватноћа успеха
- Let $n = 4$

$p \cdot p(1-p)(1-p)$ $\quad p(1-p)p(1-p)$ $\quad p(1-p)(1-p)p$

$$p_X(2) = \mathbf{P}(HHTT) + \mathbf{P}(HTHT) + \mathbf{P}(HTTH) + \mathbf{P}(THHT) + \mathbf{P}(THTH) + \mathbf{P}(TTHH)$$

све су исте: $p^2(1-p)^2$

која је вероватноћа да је 2x пала глава у 4 бацања

$$= 6p^2(1-p)^2$$

одакле нам 6?

$$= \binom{4}{2} p^2(1-p)^2$$

од 4 места изабери 2 на које иде H

за било које $n$: $p_X(2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^2$

In general:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

уместо 2, било које $k$: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$k$ – глава

глава може да падне 0 пута у $n$-бацања

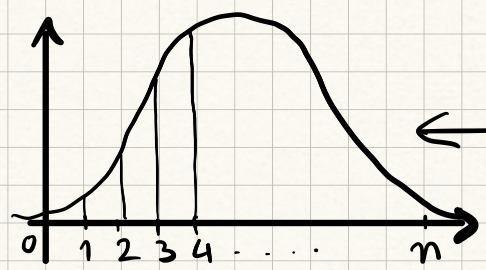
макс. $n$ пута падне глава у $n$ бац.

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ \binom{n}{0}p^0(1-p)^n & \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1} & \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} & \cdots & \binom{n}{n}p^n(1-p)^0 \end{pmatrix}$$

$=(1-p)^n$ $\qquad\qquad$ $p^n$

# БИНОМНА (БЕРНУЛИЈЕВА) РАСПОДЕЛА

$$X \sim B(n,p)$$

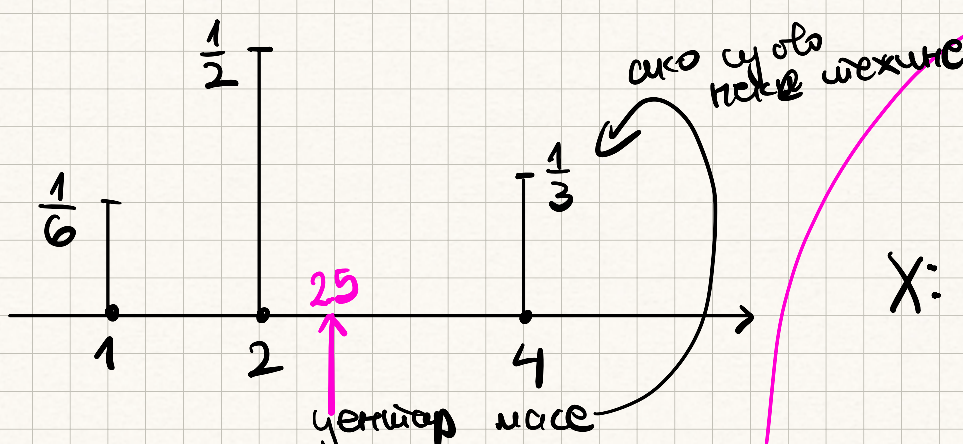



← за велико $n$ график личи на звоно

BELL CURVE

# МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ

## (EXPECTATION)




нема је овде?!

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

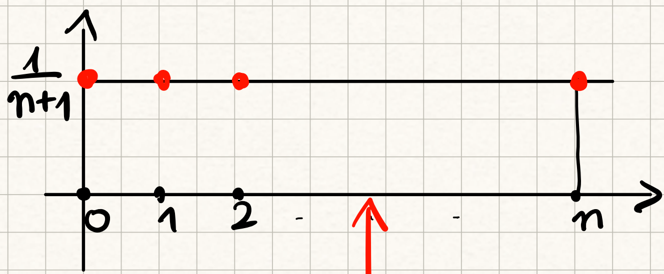
$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 4 = 2{,}5$$ ← просечна вредност коју добијамо сваког дана

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot \cancel{365}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot \cancel{365}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot \cancel{365}\cdot 4}{\cancel{365}} = 2{,}5$$

$$\sum_x x\cdot p_X(x) = E(X) \leftarrow$$

матем. очекување
„пондерирани просек"
„weighted avarage"

<u>пример</u> Униформна распределба на $0, 1, \ldots, n$?




центар маса је на половина $[0, n]$

$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{n+1} + 1\cdot\frac{1}{n+1} + 2\cdot\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{n}{n+1} = \ldots$$

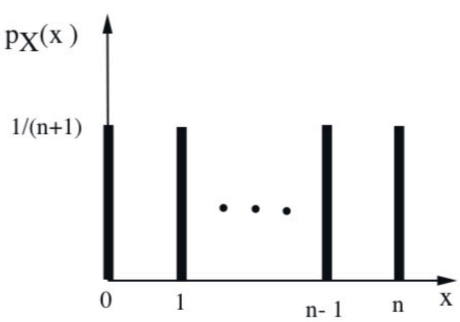
## Expectation

- Definition:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_x x p_X(x)$$

- Interpretations:
  - Center of gravity of PMF
  - Average in large number of repetitions of the experiment (to be substantiated later in this course)

- Example: Uniform on $0, 1, \ldots, n$




$$\mathbf{E}[X] = 0\times\frac{1}{n+1} + 1\times\frac{1}{n+1} + \cdots + n\times\frac{1}{n+1} =$$

пример:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

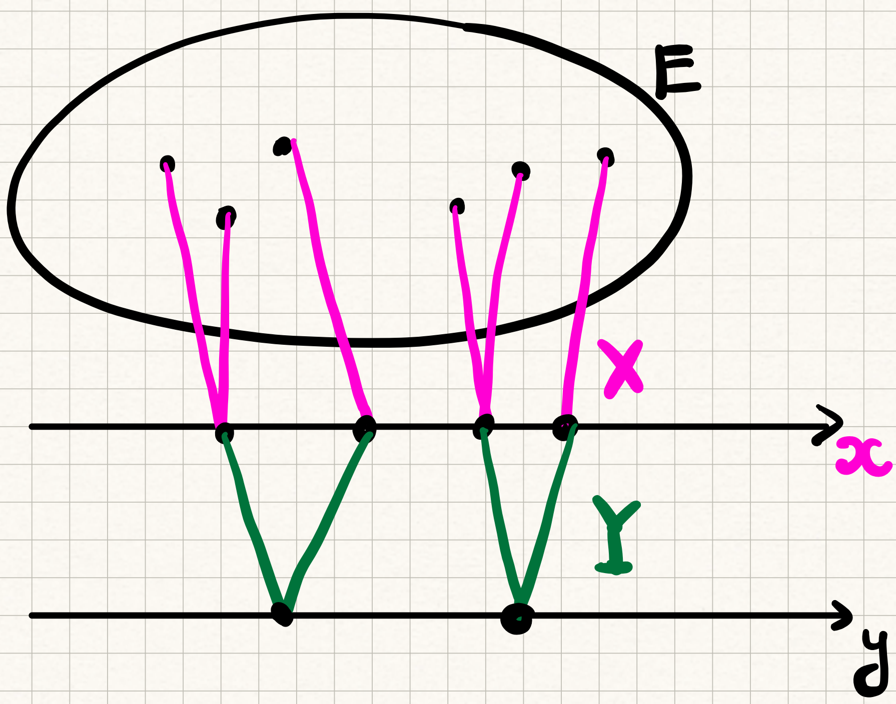
$$E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + \ldots =$$
$$= 3{,}5$$

<u>пример</u>

$$I: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$E(I) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$$

# ОСОБИНЕ




$Y = g(X)$

↓

ф-ја сл. величине
такође сл. величина

$E(Y) = ?$

$$X: \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \qquad Y = X^2 \qquad g(x)$$

$$\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array}$$

$$Y: \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \qquad Y: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$E(Y) = 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}6$$

уназад: $1^2\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}3 + 3^2\cdot 0{,}6$

$$x_1^2\, p_1 + x_2^2\cdot p_2 + x_3^2\cdot p_3$$

$$\sum x_i^2\cdot p_i$$

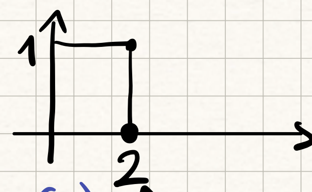
$$E(Y) = \sum_x{}' \underbrace{g(x)}\cdot p_X(x), \quad \text{за} \quad Y = g(X)$$

само ово је промењено

$$\sum_x \underbrace{x}\cdot p_X(x) = E(X)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$2(e) = 2$




центар масе је у 2

1° $E(\alpha) = \alpha$

2° $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

3° $E(\alpha \cdot X + Y) = E(\alpha X) + E(Y) = \alpha E(X) + E(Y)$

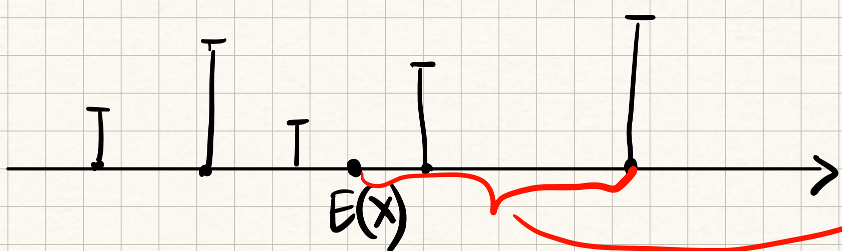
4° $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

5° Ако су $X$ и $Y$ независне сл. величине: $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

# ДИСПЕРЗИЈА (ВАРИЈАНСА)

## ... РАСИПАЊЕ

Мера колико се график расипа... колико може одступати од средње вредности




колико је график "широк", тј. колико далеко може да се удаљи од средње вредности

$$E(X - E(X)) = E(X) - \cancel{E(\widetilde{E(X)})} = E(X) - E(X) = 0$$

није добра идеја

ДЕФ: $D(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ ← ДИСПЕРЗИЈА

$$\sum (x - E(X))^2 P_X(x)$$

може се показати

$$\boxed{D(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

# СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА

Лоша ствар код дисперз. је та што квадрира ($m \to m^2$)

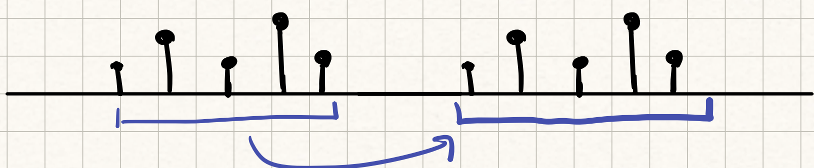
$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{D(X)}}$$

ОСОБИНЕ:

1° $D(X) \geq 0$

2° $D(\alpha) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

3° $D(\alpha \cdot X + \beta) = D(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot D(X)$



померамо за $\beta$ и ширина графика се не мења!

4° Ако су $X$ и $Y$ независне: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

# УСЛОВНА РАСПОДЕЛА И ОЧЕКИВАЊЕ

**Conditional PMF and expectation**

нова дефиниција

- $p_{X|A}(x) = \mathbf{P}(X = x \mid A)$
- $\mathbf{E}[X \mid A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$


- Let $A = \{X \geq 2\}$

$p_{X|A}(x) =$

$\mathbf{E}[X \mid A] =$

$A \to P(A) = \frac{3}{4}$

$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$
$= 2,5.$

$X|A: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

вероватноће смо пондерисали да би $\Sigma = 1$

Ф-ла по којој смо то урадили

$$\frac{\frac{1}{4}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Још мало о вероватноћама..

$X|A: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$P(X=2\,|\,A) = \frac{P(X=2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(X=2)}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$E(X|A) = 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{3} = 3$$

**Пример** Нека су $Y_i$, $i \in \{1,2,3\}$ незав. Берн. сл. величине са расподелом $Y_i: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

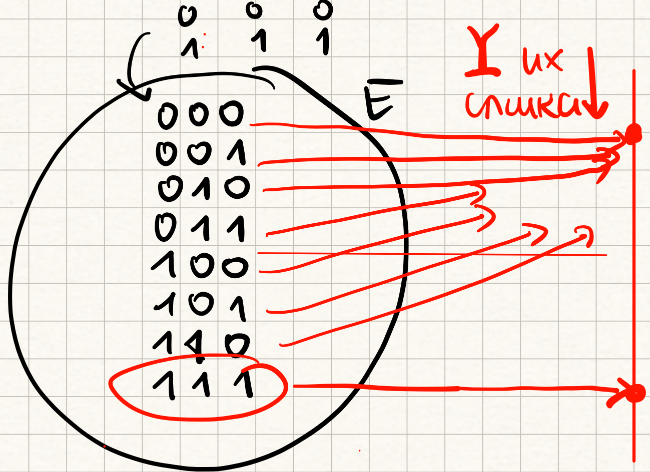
Ако је $Y = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3$ одредити:

а) $P(Y=0) = ?$

$Y_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ $Y_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ $Y_3: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$$Y = \underset{\substack{0\\1}}{Y_1} \cdot \underset{\substack{0\\1}}{Y_2} \cdot \underset{\substack{0\\1}}{Y_3}$$

$Y=1$ само ако $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 1$




$\rightarrow P(Y=0)$ ?

$Y_1 \cdot 0 \cdot Y_3 = 0$ !

$$P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = 1 - P(111) =$$
$$= 1 - \underbrace{P(Y_1=1)}_{0{,}3} \cdot \underbrace{P(Y_2=1)}_{0{,}3} \cdot \underbrace{P(Y_3=1)}_{0{,}3} = 1 - 0{,}3^3 = 0{,}973$$

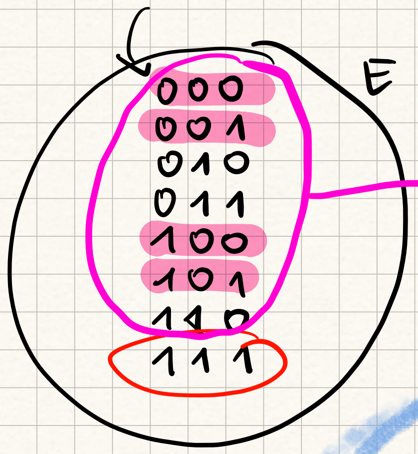
б) $P(Y_2=0\,|\,Y=0) =$

I начин Бајесова ф-ла $P(Y_2=0\,|\,Y=0) = \dfrac{\underbrace{P(Y_2=0)}_{0{,}7}\,\underbrace{P(Y=0\,|\,Y_2=0)}_{=1}}{P(Y=0)}$ а) $\Rightarrow 0{,}973$

$$= \frac{0{,}7}{0{,}973} = 0{,}719$$

## II начин

$$P(Y_2=0|Y=0)=\frac{P(Y_2=0 \wedge Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{P(000)+P(001)+P(100)+P(101)}{0,973}$$




a)

$$=\frac{0,7^3+0,7^2\cdot 0,3+0,3\cdot 0,7^2+0,3^2\cdot 0,7}{0,973}$$

$$=0,719$$

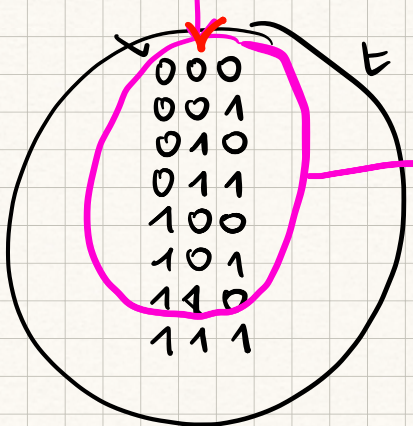
$Y_1:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$ $Y_2:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$ $Y_3:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$

б) $E(Y_2|Y=0)=?$

$Y_2:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$

Расподела за $Y_2$

$Y_2|Y=0:\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ које вредности $Y_2$ може да узме ако је $Y=0$




може $Y_2$ да буде и 0 и 1

$Y_2|Y=0:\begin{pmatrix}0 & 1\\ \bigcirc & \end{pmatrix}$

$P(Y_2=0|Y=0)$

а ово смо решили под б). $\Rightarrow 0,719$

$Y_2|Y=0:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0,719 & \bigcirc\end{pmatrix}$

?: $1-0,719$

$Y_2|Y=0:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0,719 & 0,281\end{pmatrix}$

$$E(Y_2 | Y=0) = 0 \cdot 0{,}719 + 1 \cdot 0{,}281 = 0{,}281$$