

11.03 6.11 ✓

$p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  —  $n$  -ocoba <sup>među</sup> ishodima koje saobe  
poš. ishodima gata

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = \frac{365}{365 \cdot 365} = \frac{1}{365} = 0,00274$$

⋮

$$p_n = \frac{365^n - 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{\underbrace{365 \cdot 365 \cdots 365}_n} =$$

За koje  $n$  ova  $p_n$  ishodima veća od  $\frac{1}{2}$ ?

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$$

↑  
 $\frac{1}{2}$ 

За  $n=26$  verovatnoća  $> \frac{1}{2}$

Ишод. подел. експер. ... није регистровано одређени условима експ.  
Симметриј. експер. згодности следеће услове:

1. .. ишта прашимо

Изајмо 2 извешта испитивања:

Прашимо га ни је иста  $\Gamma$  или  $\Pi$

2. познати су сви могући исходи

$\Gamma\Gamma, \Gamma\Pi, \Pi\Gamma, \Pi\Pi$

3. може се поставити одговарјујућа

4. исход эксперимента един. может принадлежат

ЭЛЕМЕНТАРНИ ИСХОД - не може разложити на ...

ГГ, ПП, ...

$$E = \{ \text{ГГ, ГП, ПГ, ПП} \}$$

↑ свих  
исходів ЕЛЕМЕНТАРНИХ ИСХОДА

СЛУЧАЙНИ ДОГАДАЈ је сваки појединачни исход E

A = {ГП, ПГ} = "исход је резултат Г"

B = "исход је пар резултат П" = {ГП, ПГ, ПП}

- Ако први број коинца је мањи од другог?

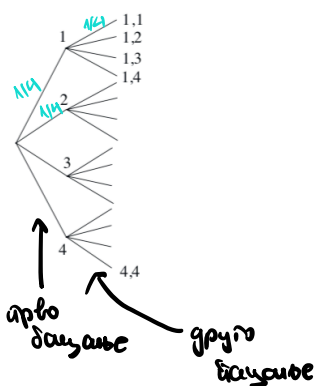
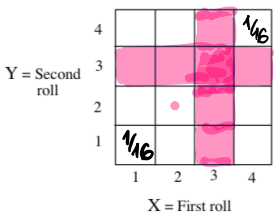
$$E = \{0, 1, 2\}$$

- Бројачко правило гласи да је  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$E = \{ \text{П, ГП, ГГП, ГГГП, ГГГГП, \dots} \}$$

Sample space: Discrete example

- Two rolls of a tetrahedral die
- Sample space vs. sequential description



$$P(X=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

колика је вероватноћа  
⇒ сва исходна комбинација је  $\frac{1}{16}$

A = "исход је пар резултат убрзика"  
= {31, 32, 33, 34, 13, 23, 43}

$$P(A) = \frac{7}{16} = \frac{7}{16 \cdot \frac{1}{16}}$$

Sample space: Continuous example

$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$

$A = \{X \text{ je manje od } Y\}$

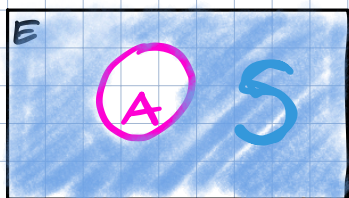
- Zotažuj A se REALIZOVAO (OSTVARILO) ako je rezultat neki ishod iz skupa A

- **SIKURAN** događaj je onaj koji se uvijek ostvaruje,  $A = E$

- **NIŠTOGA** je onaj koji se nikad ne ostvaruje,  $A = \emptyset$ .

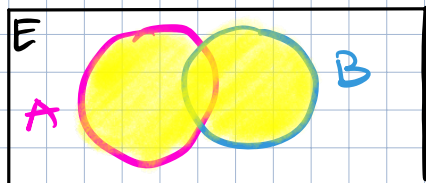
ΔEØ:

**СУПРОТАН ДОГАЂАЈ** S događaji A je ..  $S = A^c, S = \bar{A}$

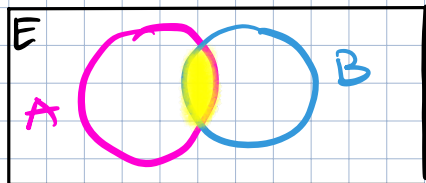


ΔEØ: **УНИЈА ДОГАЂАЈА**  $A \cup B$  je случ. qđ. C koji se ostv. .. BAR JEDAM od događaja A или B.

$C = A \cup B$



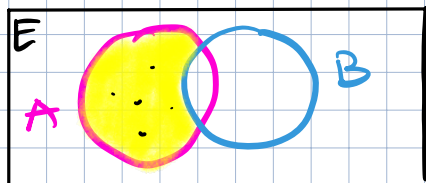
ΔEØ: **ПРЕСЕК ДОГАЂАЈА**  $A \cap B$  je сл. događaj D akko se ostvaruju и A и B.



$D = A \cap B$

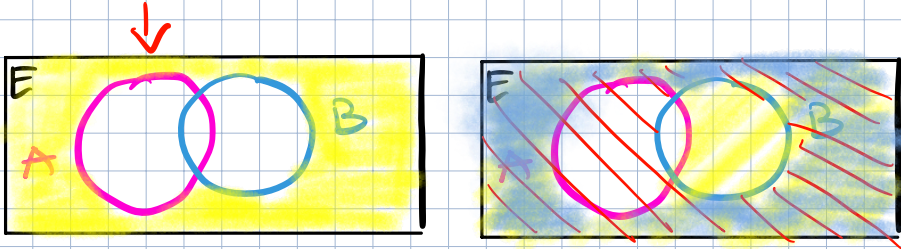
није усавршена!

ΔEØ: **РАЗЛИКА ДОГАЂАЈА**  $A \setminus B$  ← реализовано се A, али није B



# ДЕ-МОРГАНОВА ПРАВИЛА

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ДЕФ: Два гои. су **УЗАДАМНО ИСКЛУЧИВА** ако се не могу истовремено догодити.

$$A \cap B = \emptyset$$

пресек и шемо  $A \cap B = AB$

# ВЕРОВАТНОЋА

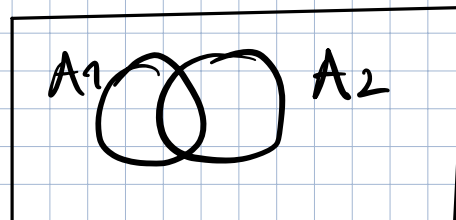
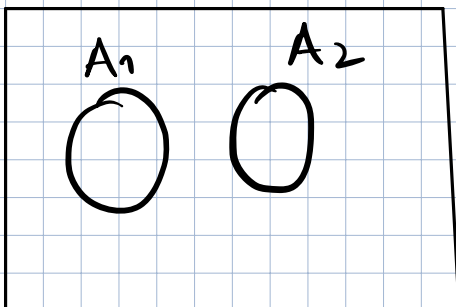
ДЕФ. Нека је  $E$ . Фја  $P$  гедф. Наг појасујемома акуја  $E$  назива се **ВЕРОВАТНОЋА** ако има осодине:

а1) НЕПЕРАТИВНОСТ:  $P(A) \geq 0, \forall A \subseteq E$

а2) НОРМИРАНОСТ:  $P(E) = 1$  ( $P(A) \leq 1$ )

а3) АДИТИВНОСТ:  $A_1, A_2 \subseteq E$  и  $A_1 A_2 = \emptyset$

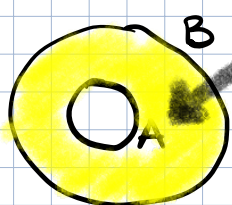
шагн  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$



Ја тих не  
важи пер  
је пресек  
неправан!

# ПОСЛЕДСТВИЕ (ОСОБЕННОСТИ):

$$1^{\circ} A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$



$B \setminus A$

$$B = (B \setminus A) \cup A$$

$$(B \setminus A) \cap A = \emptyset$$

приведем:

а) АДИТИВНОСТЬ:  $A_1, A_2 \subseteq E$  и  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

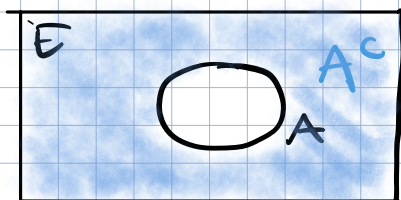
тогда  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

$$\Rightarrow P(\underbrace{(B \setminus A) \cup A}_B) = P(B \setminus A) + P(A)$$

$$P(B) = \underbrace{P(B \setminus A) + P(A)}_{\geq 0 \text{ по а1}}$$

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

$$2^{\circ} P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{— ВЕРОЯТНОСТЬ СЛЮПОТНОГО СОБЫТИЯ}$$



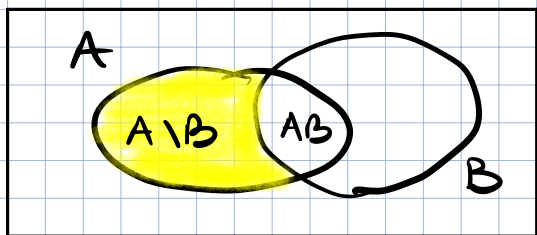
доказ за по малу прека а3)  
 $A \cap A^c = \emptyset \dots$

$$3^{\circ} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

б) АДИТИВНОСТЬ:  $A_1, A_2 \subseteq E$  и  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$   
тогда  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

← Различно у случају кад?  
А и В не су дисјунктивни,  
та  $P(A \cap B) \neq 0$   
због тога се уклањује

$$4^{\circ} P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$



гласно за гом. иреко  $A \setminus B$

$$5^{\circ} P(A) \leq 1$$

## ЛАПЛАСОВА (КЛАСИЧНА) ЛЕД. ВЕРОВАТНОСТЕ

Нека је  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  коначан скуп од  $n$  ЈЕДНАКО ВЕРОВАТНИХ исхода. Ако се сл. догађај  $A$  састоји од  $k$  једнаковеров. исхода, онда  $P(A)$  зовемо вер. догађаја и израчунавамо је по форму:

$$P(A) = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{број свих могућих исхода}} = \frac{k}{n}$$

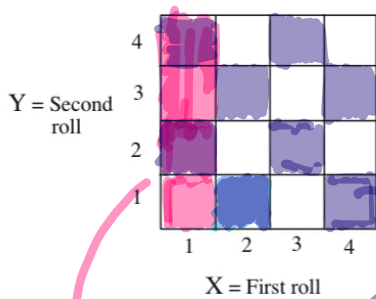
### Discrete uniform law

- Let all outcomes be equally likely
- Then,
 
$$P(A) = \frac{\text{number of elements of } A}{\text{total number of sample points}}$$
- Computing probabilities  $\equiv$  counting
- Defines fair coins, fair dice, well-shuffled card decks

лимитно-вероватност

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$$

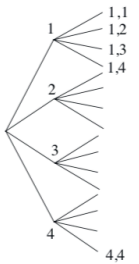
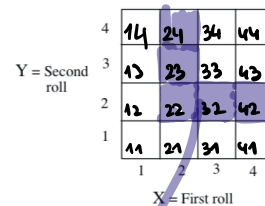
## Probability law: Example with finite sample space



- Let every possible outcome have probability  $1/16$ 
  - $P((X,Y) \text{ is } (1,1) \text{ or } (1,2)) = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$
  - $P(\{X = 1\}) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
  - $P(X + Y \text{ is odd}) = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
  - $P(\min(X,Y) = 2) = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

## Sample space: Discrete example

- Two rolls of a tetrahedral die
  - Sample space vs. sequential description



пример Умамо 12 кулиња : 4Ц, 3Б, 5С

а) Колика је вероватноћа да излучемо црну?

$$P(A) = \frac{4}{12}$$

A = "излучили смо црну"

б) Која је вероватноћа да не излучемо црну?

$$p = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$$

II начин:

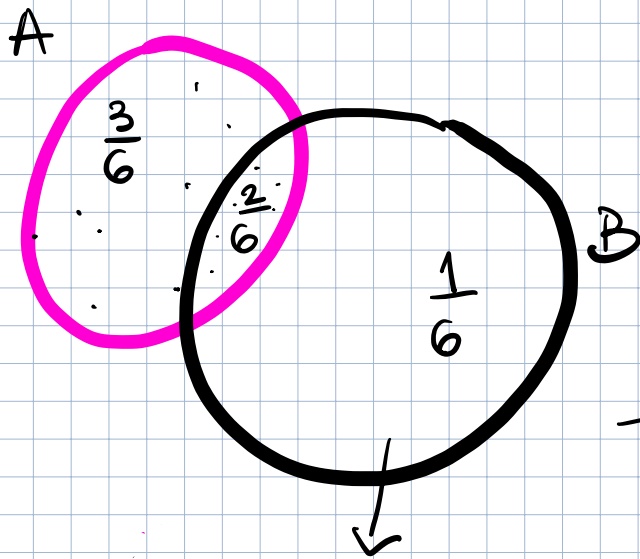
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{4}{12} = \frac{12-4}{12} = \frac{8}{12}$$

$$\rightarrow P(B \cup S) \stackrel{a,b)}{=} P(B) + P(S)$$

$B \cap S = \emptyset$

# УСЛОВНА ВЕРОВАЈНОЌА

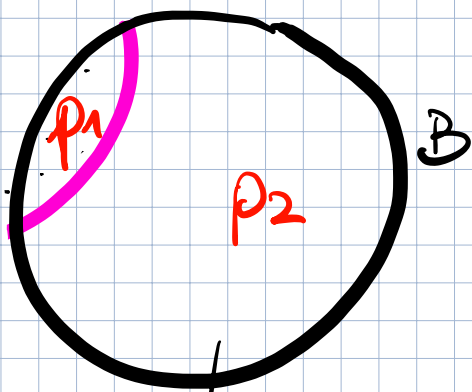


$$P(A) = \frac{5}{6}$$

Затогуно се B?

→ B нештога нису нолу делити!

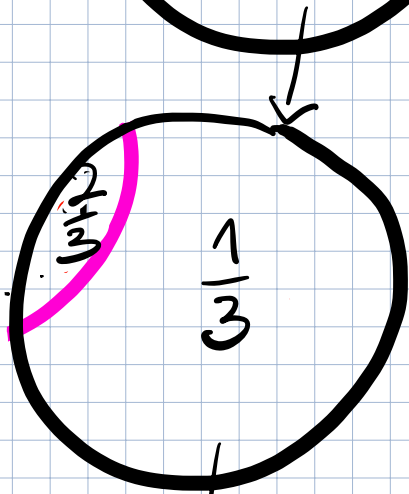
- Колика је САД вероватноћа да се догодило А?



← Укупна вероватноћа  $p_1 + p_2 = 1$  мора да буде = 1

- а одакле вероватноћа морају изићи из ове

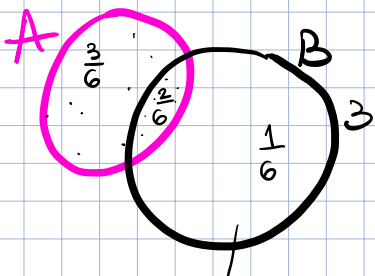
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2/6}{1/6}$$



$$P(A|B) = \frac{2}{3}$$

"p од А под условом B"

AEO: на. да је  $P(B) \neq 0$ .  $\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$



$$P(A|B) = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

слично важи:

ПРАВИЛО ПРОИЗВОДА:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

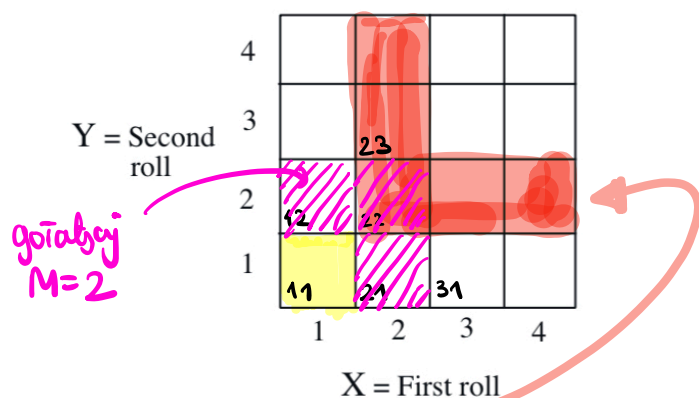
$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Це ф. не оцвѣтују га ваге:

нпр.

$$P(A \cup B | C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B | C)$$

Die roll example



- Let  $B$  be the event:  $\min(X, Y) = 2$  — гопѣлѣј
- Let  $M = \max(X, Y)$  — неку дрѣј а не гопѣлѣј
- $P(M = 1 | B) = \frac{P(M=1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{5/16} = 0$
- $P(M = 2 | B) = \frac{P(M=2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2, 2, 3\})}{\frac{5}{16}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{1}{5}$