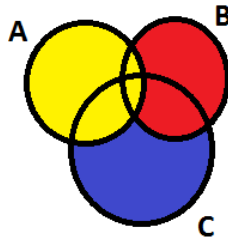
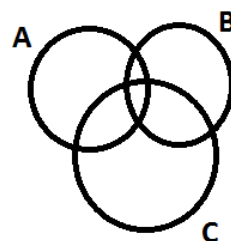
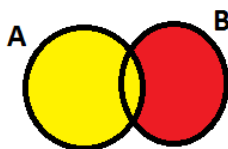
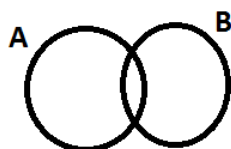


- Date događaje predstaviti kao unije disjunktih događaja, a zatim ispisati jednakost koja važi za te disjunktne događaje na osnovu treće aksiome teorije verovatnoće (aksiome o aditivnosti):
  - $D = A \cup B$
  - $E = A \cup B \cup C$
- Date su dve kutije. U prvoj se nalazi  $a$  belih,  $b$  crnih, a u drugoj  $c$  belih i  $d$  crnih kuglica.
  - Iz prve kutije se prebacuje jedna kuglica u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije izvlači kuglica. Naći verovatnoću da je ona bela.
  - Ako je  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$  i  $d = 1$ , odrediti verovatnoću da je iz druge kutije izvučena crna kuglica.
  - Ako je iz druge kutije izvučena crna kuglica, naći verovatnoću da je prebačena bela kuglica iz prve kutije.
- Kontrolor ima na stolu 4 proizvoda čiji kvalitet treba da proveri. Zna se da svaki proizvod može da bude neispravan sa verovatnoćom 0.1. Kontrolor vrši proveru sve dok ne otkrije dva neispravna proizvoda, a ako se to ne desi, on će proveravati sva 4 proizvoda.
  - Odrediti raspodelu za slučajnu promenljivu  $X$  koja predstavlja broj proveravanih proizvoda.
  - Odrediti raspodelu za slučajnu promenljivu  $Y$  koja predstavlja broj neispravnih proizvoda.
  - Odrediti raspodelu dvodimenzione slučajne promenljive  $(X, Y)$
- Pretpostavimo da pH vrednost zemljišta jednog regiona ima normalnu raspodelu sa  $\mu = 6$  i  $\sigma = 0.1$ . Ako je sa tog podružja uzet jedan uzorak zemljišta, naći verovatnoću da uzeti uzorak ima pH vrednost
  - jednaku 5.5,
  - između 5.9 i 6.15,
  - veću od 6,
  - najviše 5.95.
- Taj-brejk u tenisu dobija igrač koji prvi osvoji 7 poena, osim ako je rezultat 7-6, i tada se igra nastavlja sve dok jedan od igrača ne osvoji dva poena prednosti. Pretpostavimo da je igra stigla do situacije kada jedan igrač pokušava da osvoji ta 2 poena prednosti. Pretpostavimo da server osvaja poen sa verovatnoćom 0.6, i da samo jedan igrač servira u ovom taj-brejku. Neka stanje Markovljevog lanca predstavlja razliku poena između servera i drugog igrača, tj. stanje je "0", ako je rezultat, npr 7-7 ili 8-8, stanje je "-1" ako je rezultat 6-7, itd.
  - Koja stanja će biti završna?
  - Opisati Markovljevim procesom ovaj proces.
  - Koja je verovatnoća da gem osvoji igrač koji ne servira, ako je u prednosti 1 poen?

Rešenja na TMF-u u Beogradu Februar 2024

A grupa



$D = A \cup B\bar{A}$   
 $A \cap B\bar{A} = \emptyset$   
 $E = A \cup B\bar{A} \cup C\bar{A}\bar{B}$   
 $A \cap B\bar{A} = \emptyset$   
 $A \cap C\bar{A}\bar{B} = \emptyset$   
 $B\bar{A} \cap C\bar{A}\bar{B} = \emptyset$

- U zadatku nije navedeno da su  $A$  i  $B$  disjunktni, dakle potrebno je posmatrati opšti slučaj koji podrazumeva da njihov presek može biti i neprazan! Događaje  $D$  i  $E$  treba zapisati kao uniju nekih drugih događaja koji su (uvek!) disjunktni. Postoji više mogućih rešenja. Jedno od njih je:
  - $D = A \cup B\bar{A}$   
 $P(D) = P(A) + P(B\bar{A})$
  - $E = A \cup B\bar{A} \cup C\bar{A}\bar{B}$   
 $P(E) = P(A) + P(B\bar{A}) + P(C\bar{A}\bar{B})$
- Neka su događaji:
 

$H_B =$  "iz prve kutije prebačena je bela kuglica u drugu kutiju"

$H_C =$  "iz prve kutije prebačena je crna kuglica u drugu kutiju"

$B$ ="iz druge kutije izvučena je bela kuglica"

$C$ ="iz druge kutije izvučena je crna kuglica"

$$a) p(B) = p(H_B) \cdot p(B|H_B) + p(H_C) \cdot p(B|H_C) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1}$$

$$b) p(B) = \frac{11}{15}$$

$$p(C) = 1 - p(B) = \frac{4}{15}$$

$$c) p(H_B|C) = \frac{p(H_B \cap C)}{p(C)} = \frac{p(C|H_B) \cdot p(H_B)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{4}$$

3. Označimo sa 'N' pojavu neispravnog proizvoda, a sa 'I' ispravan proizvod.

$$a) p(X = 2) = p(NN) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$$

$$p(X = 3) = p(INN) + p(NIN) = 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.018$$

$$p(X = 4) = 1 - p(X = 2) - p(X = 3) = 0.972$$

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.01 & 0.018 & 0.972 \end{pmatrix}$$

$$b) p(Y = 0) = p(III) = 0.9^4 = 0.6561$$

$$p(Y = 1) = p(NIII) + p(INII) + p(IINI) + p(IIIN) = 4 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1 = 0.2916$$

$$p(Y = 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) = 0.0523 = p(NN) + p(INN) + p(NIN) + p(IINN) + p(ININ) + p(NIIN)$$

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.6561 & 0.2916 & 0.0523 \end{pmatrix}$$

c)

X/Y	0	1	2
2	0	0	$p(NN) = 0.01$
3	0	0	$p(INN) + p(NIN) = 0.018$
4	$p(III) = 0.6561$	$p(IIIN) + p(IINI) + p(INII) + p(NIII) = 0.2916$	$p(IINN) + p(ININ) + p(NIIN) = 0.0243$

4. a)  $p(X = 5.5) = 0$

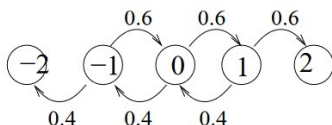
$$b) p(5.9 \leq X \leq 6.15) = 0.7745$$

$$c) p(X > 6) = 0.5$$

$$d) p(X \leq 5.95) = 0.3085.$$

5. a) Stanja "-2" i "2"

b)



c) Potrebno je naći sve puteve koji vode iz stanja "-1" u "-2"

$$p(-1 \rightarrow -2) + p(-1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow -2) + p(-1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow -2) + \dots =$$

$$= 0.4 + (0.6 \cdot 0.4) \cdot 0.4 + (0.6 \cdot 0.4)^2 \cdot 0.4 + (0.6 \cdot 0.4)^3 \cdot 0.4 + \dots =$$

$$0.4 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (0.6 \cdot 0.4)^i =$$

$$0.4 \frac{1}{1 - 0.6 \cdot 0.4} = 0.53$$