

- Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Ako je izvučena herc karta, tada se izvlače dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 2 žute i 3 plave kuglice, a u ostalim slučajevima, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 4 žute i 1 plava kuglica.
 - $\boxed{8}$ Izračunati verovatnoću da će biti izvučene kuglice istih boja.
 - $\boxed{12}$ Ako se zna da su izvučene kuglice različitih boja, izračunati verovatnoću da je izvučena herc karta.
- U grupi je 5 dečaka i 5 devojčica. Na slučajan način izabrano je troje dece u ekipu. Slučajna promenljiva X predstavlja broj devojčica u ekipi.
 - $\boxed{6}$ Odrediti raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X .
 - $\boxed{6}$ Odrediti disperziju slučajne promenljive X .
 - $\boxed{8}$ Ako je A događaj da u ekipi ima barem jedan dečak, odrediti $E(X|A)$.
- $\boxed{20}$ Neka slučajna promenljiva X predstavlja vreme (izraženo u minutima) koje predstavlja vreme čekanja brzog lifta. Neka je data funkcija

$$f_x(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0, x \geq 1 \end{cases}$$
 Odrediti konstantu k tako da funkcija f_x može predstavljati funkciju gustine slučajne promenljive X .
- U kutiji se nalaze 2 bele i 4 crne kuglice. Na slučajan način, bez vraćanja biramo jednu za drugom dve kuglice. Neka su slučajne promenljive X i Y jednake broju belih kuglica u prvom, odnosno drugom izvlačenju.
 - $\boxed{4}$ Odrediti raspodele verovatnoća slučajnih promenljivih X i Y .
 - $\boxed{6}$ Odrediti dvodimenzionu raspodelu slučajne promenljive (X, Y) i upisati u tabelu sve $p_{(X,Y)}(x, y)$
 - $\boxed{6}$ Odrediti raspodelu slučajnih veličina XY i $X + Y$
 - $\boxed{4}$ Izračunati standardne devijacije σ_x i σ_y
- Petar i Marija igraju igru osvajanja loptica. Postoje 4 loptice i one su rasporedjene u dve kutije: Petrovu kutiju i Marijinu kutiju. Oni na raspolaganju imaju jednu hvataljku kojom pokušavaju da prihvate po jednu lopticu iz tuđe kutije, pa da je prebace u svoju. Igra se završava kada jedan igrač prebaci sve loptice u svoju kutiju. Petar i Marija hvataljku koriste naizmenično. U jednom potezu igre, neki igrač pokušava hvataljkom da prihvati lopticu iz tuđe kutije, i ukoliko uspe da uhvati lopticu, prebacuje lopticu u svoju kutiju. Hvataljka je nezgodna, i verovatnoća da će njome uspeti da uhvati lopticu u jednom potezu igre je samo 0.6. Ukoliko igrač u tom potezu ne uspe da uhvati lopticu, ta loptica ostaje i dalje u toj kutiji, a hvataljku predaje drugom igraču. Sada je drugi igrač na potezu, koji pokušava isto - da hvataljkom uhvati lopticu iz tuđe kutije i prebaci je u svoju. Ne znamo na koji način su loptice rasporedjene u Petrovoj i Marijinoj kutiji na samom početku igre. Neka svakom stanju odgovara BROJ loptica koje se nalaze u kutiji u kojoj je hvataljka TRENUTNO.
 - $\boxed{12}$ Opisati Markovljevim procesom ovu igru i odrediti verovatnoće prelazaka kroz stanja.
 - $\boxed{8}$ Dobili smo informaciju o početnom stanju: hvataljka se nalazi u kutiji gde je samo jedna loptica. Koja je verovatnoća da se igra završi u najviše pet poteza?

Rešenja na TMF-u u Beogradu septembar, 2025.

A grupa

- $p = \frac{1}{4}(\frac{2}{5} \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \frac{2}{4}) + \frac{3}{4} \frac{4}{5} \frac{3}{4} = \frac{11}{20}$
 - H="izvučena je herc karta"
D="izvučene su karte različitih boja"

$$p(H|D) = \frac{p(H)p(D|H)}{p(D)} = \frac{\frac{1}{4} \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{3}$$

- $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

- $D = 7/12$

- $X|A : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$
 $E(X|A) = 15/11$

- Mora da važi $\int_0^1 kx^2 = 1$. Odatle se dobija $k=3$.

- $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- | Y/X | 0 | 1 |
|-----|----------------|----------------|
| 0 | $\frac{6}{15}$ | $\frac{4}{15}$ |
| 1 | $\frac{5}{15}$ | $\frac{5}{15}$ |

- $XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

$$X + Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

$$d) \sigma_x = \sigma_y = \sqrt{2/3}$$

5. a) Može se preći u stanje "3" sa verovatnoćom 0.4, i u stanje "4" sa verovatnoćom 0.6

$$d) p = 0.6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0.7459$$

