

Дискретни случајни вектори

Посматрамо 2-глатичиону сл. величину (quick security)

$$(X, Y)$$

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X=x \text{ и } Y=y)$$

пример: ^{4-цифра} кодука се дуга 2x. Нека је X сл. вел. која представља први годишњи број, а Y максимум годишњих бројева

$$X \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

$$p(X,Y)$$

$$p(1,1)$$

↑
први је број 1
макс је 1

1 1	2 1	3 1	4 1
1 2	2 2	3 2	4 2
1 3	2 3	3 3	4 3
1 4	2 4	3 4	4 4

↑
p сваког исхода је $\frac{1}{16}$

$$p(2,1)$$

$$p(2,3)$$

$$p(3,1)$$

$$p(1,2)$$

$$p(2,2)$$

$$p(2,4)$$

$$p(3,2)$$

$$p(3,3)$$

$$p(3,4)$$

ОСЛАБИТЕ:

$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x,y) = 1$$

$$p_X(3) = P(X=3) = 0 + 0 + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$

↑
дискретни X, а континуални Y

Ако знамо групираниот расподел, тогаш можемо одредити и обичну, т.е. МАРГИНАЛУ расподелу.

$Y \backslash X$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{7}{16}$
	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} \end{pmatrix}$$

Што је са условнои вероватноћаи?

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

т.е. $Y=2$

$$y=2: \frac{1}{16} \quad \frac{2}{16} \quad 0 \quad 0$$

расподела за X је

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(Y=2) = \frac{3}{16}$$

можемо ја потврдити
($\sum p = 1$)

вероватноће делимо са $P(Y=2)$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X_{Y=2}: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3} \quad \frac{\frac{2}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{2}{3}$$

Пример 1. Две фабрики производят углеродный материал. Первая фабрика производит 30% от общего объема, а вторая 70%. Качество продукции оценивается по количеству дефектов. Вероятности появления дефектов в зависимости от фабрики и количества дефектов даны в таблице.

Y \ X	0	1	2	3	
0	0,21	0,23	0,14	0,07	0,7
1	0,06	0,08	0,04	0,02	0,2
2	0,03	0,04	0,02	0,01	0,1
	0,3	0,4	0,2	0,1	

а) Вычислить вероятность того, что первая фабрика произведет материал с количеством дефектов, меньшим, чем у второй.

$$P(X < Y) = P(0,1) + P(0,2) + P(1,2) = 0,06 + 0,03 + 0,04 = 0,13$$

б) Вычислить математические ожидания случайных величин X и Y.

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 1,1$$

$$E(Y) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 = 0,4$$

в) Если известно, что первая фабрика производит материал с количеством дефектов, равным трем, вычислить математическое ожидание количества дефектов во второй фабрике, а также $E(Y|X=3)$.

$$Y_{X=3}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,07 & 0,02 & 0,01 \end{pmatrix}$$

A = "первая фабрика производит материал с количеством дефектов, равным трем."

тогда $X=3$

получим $P(X=3) = 0,1$

$$Y_{X=3}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$\Sigma = 1$

Y \ X	0	1	2	3	
0	0,21	0,23	0,14	0,07	0,7
1	0,06	0,08	0,04	0,02	0,2
2	0,03	0,04	0,02	0,01	0,1
	0,3	0,4	0,2	0,1	

$$E(Y|X=3) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 = 0,4$$

$$i) E(Y|X \geq 2)$$

$$B = "X \geq 2" \quad P(B) = 0,3$$

$$Y_{X \geq 2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,21 & 0,06 & 0,03 \end{pmatrix} \quad P(B) = 0,3$$

$$\downarrow$$

$$0,14 + 0,07$$

$$Y_{X \geq 2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$E(Y|X \geq 2) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 = 0,4$$

Итак, мы уже знаем, что X и Y независимы, так как Y одинакова, и это, без сомнения, не X .

$$g) E(X|Y < 2)$$

$Y \backslash X$	0	1	2	3	
0	0,21	0,08	0,14	0,07	0,7
1	0,06	0,08	0,04	0,02	0,2
2	0,03	0,04	0,02	0,01	0,1
	0,3	0,4	0,2	0,1	

$$C = "Y < 2" \quad P(C) = 0,9$$

$$X_{Y < 2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,27 & 0,36 & 0,18 & 0,09 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$0,21 + 0,06$$

$$P(C) = 0,9$$

$$X_{Y < 2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$E(X|Y < 2) = 1,1$$

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x \text{ и } Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) \leftarrow \text{НЕЗАВИСИМОСТЬ}$$

$\downarrow$
 $z =$ $\text{дважды по } (X,Y)$