Пример 1 Нека су Y_1, Y_2, Y_3 независне Бернулијеве сл. вел. са расподелом $Y_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Ако је $Y = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3$ одредити

а) $P(Y=0)$

б) $P(Y_2=0 \mid Y=0)$

в) $E(Y_2 \mid Y=0)$

Y	$Y_1 Y_2 Y_3$
0	000
0	001
0	010
0	100
0	011
0	101
0	110
1	111

E

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

има их

а) $Y = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3$

$P(Y=0) = P(000) + P(001) + P(010) + \ldots + P(110)$ или једноставно

$P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = 1 - P(111) = 1 - \underbrace{0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3}_{0{,}027} = 0{,}973$

$P(Y_1=1)$, $P(Y_2=1)$, $P(Y_3=1)$

исто то бисмо и овде додуше:

$= 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + \ldots$

$P(Y_1=0)$, $P(Y_2=0)$, $P(Y_3=1)$

б) $P(Y_2=0 \mid Y=0)$

I начин: да ли знамо $P(Y=0 \mid Y_2=0) = 1$ ($\underbrace{\_ 0 \_}_{1}$)

Пошто знамо формулу, можемо Бајес:

$$P(Y_2=0 \mid Y=0) = \frac{\overbrace{P(Y=0 \mid Y_2=0)}^{=1} \overbrace{P(Y_2=0)}^{0{,}7}}{\underbrace{P(Y=0)}_{0{,}973}} = \frac{1 \cdot 0{,}7}{0{,}973} = 0{,}719$$

II начин:

$$P(Y_2=0 \mid Y=0) = \frac{P(Y_2=0 \cap Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{P(000)+P(001)+P(100)+P(101)}{0{,}973}$$

$$= \frac{0{,}7^3 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}7}{0{,}973} = 0{,}719$$

000
001
010
100
011
101
110
111

в) $E(Y_2 \mid Y=0)$

$Y_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$0{,}3 \to P(Y_2=1)$, $0{,}7 \to P(Y_2=0)$

$E(Y_2) = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}7 \ldots$

000
001
010
100
011
101
110
111

$Y=0$

$Y_2 \mid Y=0: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}281 & 0{,}719 \end{pmatrix}$

одреди под б)

$P(Y_2=0 \mid Y=0)$

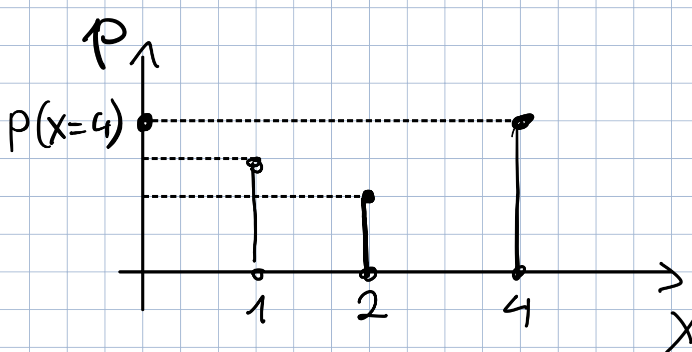
$p? \to 1 - 0{,}719$

$P(Y_2=1 \mid Y=0) = \dfrac{P(Y_2=1 \cap Y=0)}{P(Y=0)}$

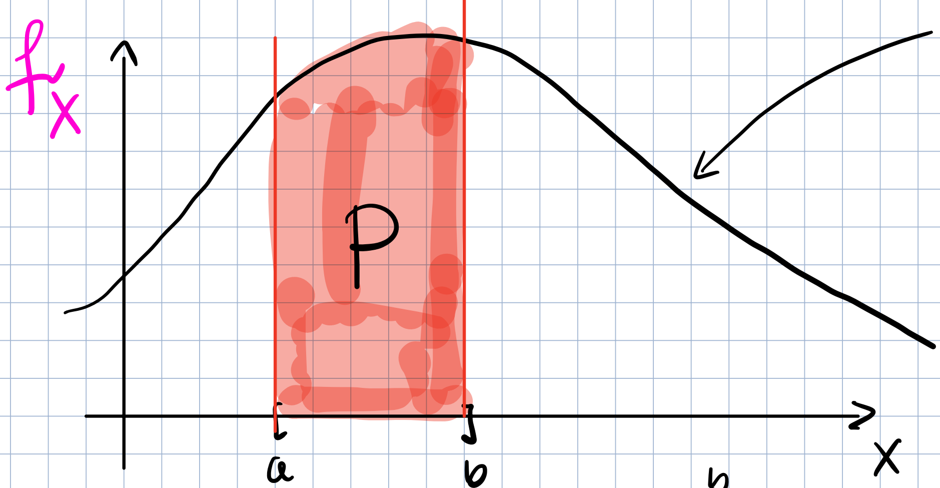
$E(Y_2 \mid Y=0) = 1 \cdot 0{,}281 + 0 \cdot 0{,}719 = 0{,}281$

НЕПРЕКИДНА (КОНТИНУАЛНА) СЛУЧАЈНА ВЕЛИЧИНА

X је непрекидна..



← дискретна



ф-ја густине вероватноћа

PDF = "Probability Density Fun"

↓

Она нас информише о вероватноћи да се вредност сл. пр. X нађе у неком интерв.

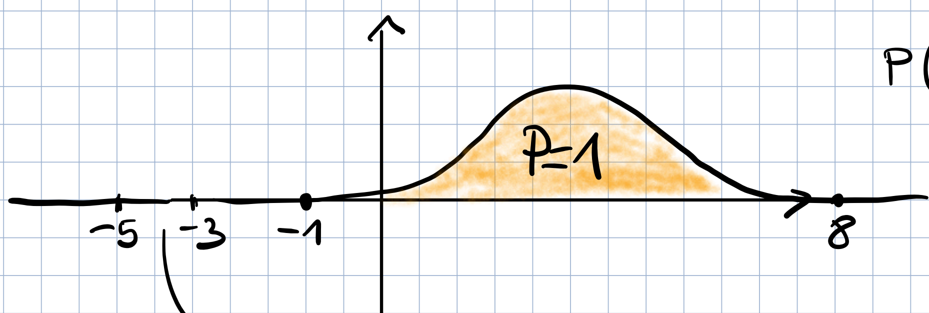
Како? $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

$P(-\infty \le X \le \infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

ОСОБИНЕ:

1° $f_X(x) \ge 0$

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$



$P(-1 \le X \le 8) = 1$

$P(-\infty \le X \le \infty) = \infty$

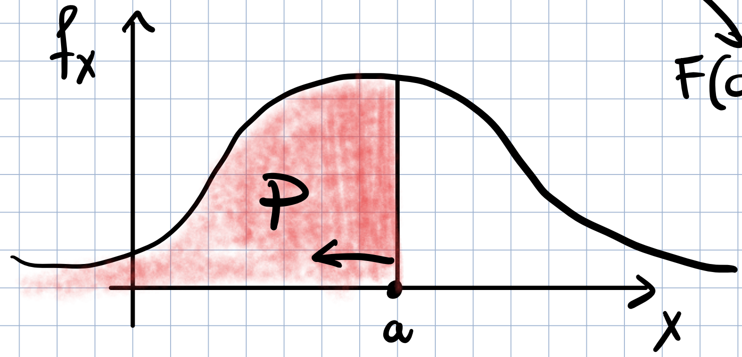
$P(-5 \le X \le 3) = 0$

Функција расподеле непрекидне случајне величине X

$$F_X(x) := P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

$P(-\infty \le X \le x)$

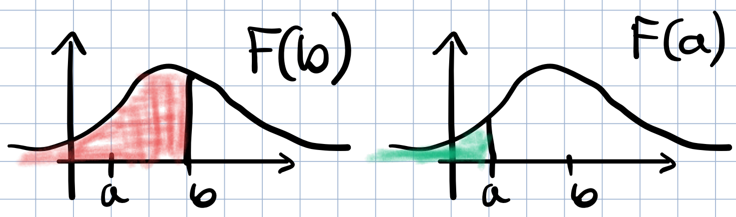
CDF = "Cumulative Distributive Function"

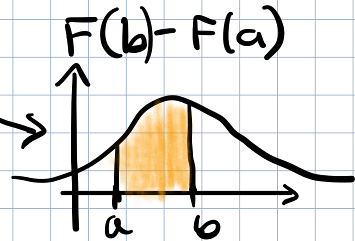


$F(a)$ нам говори која површина графика је лево од a.

ОСОБИНЕ

1° $P(a \le X \le b)$
$= F(b) - F(a)$





константа

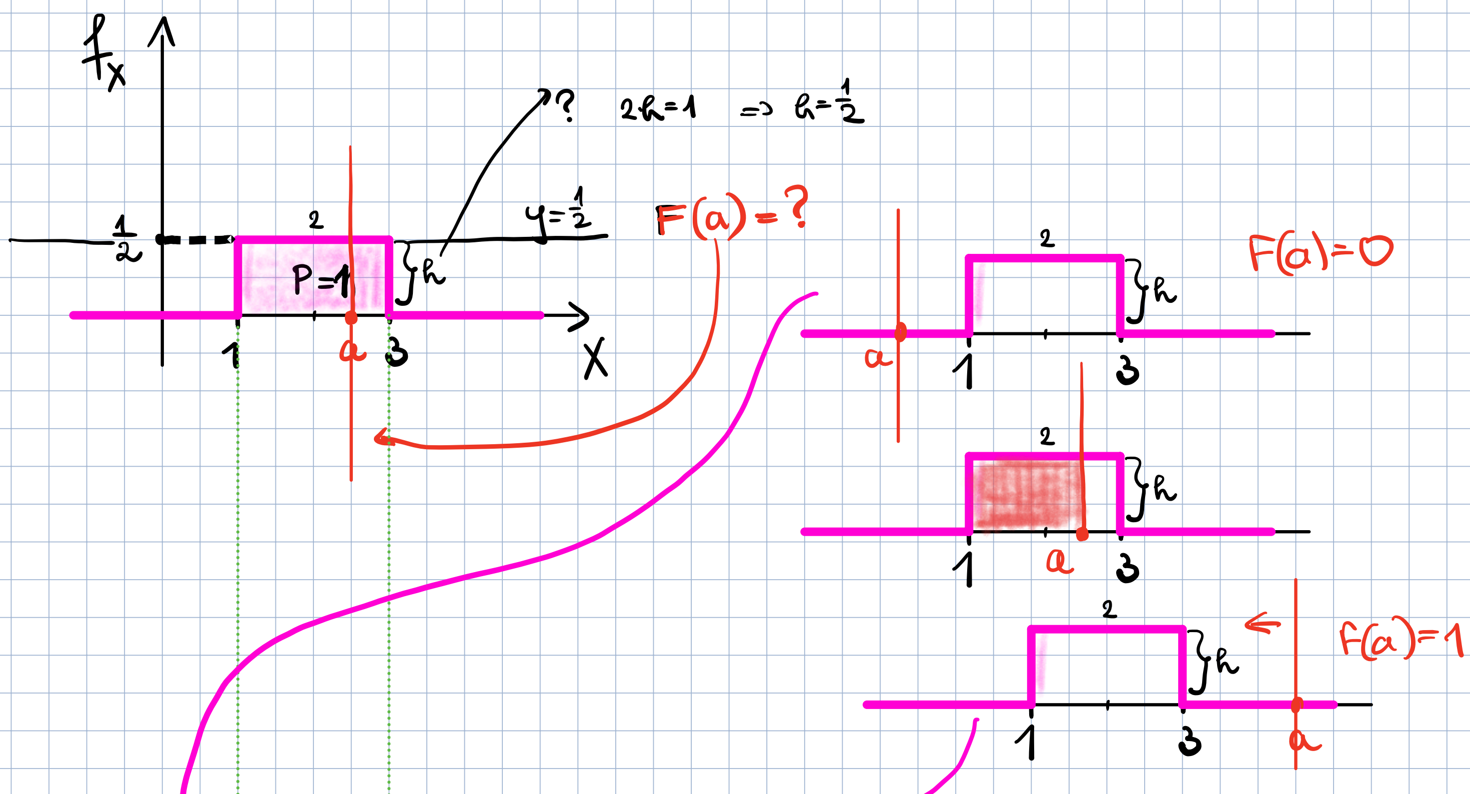
2° $P(X = c) = 0$

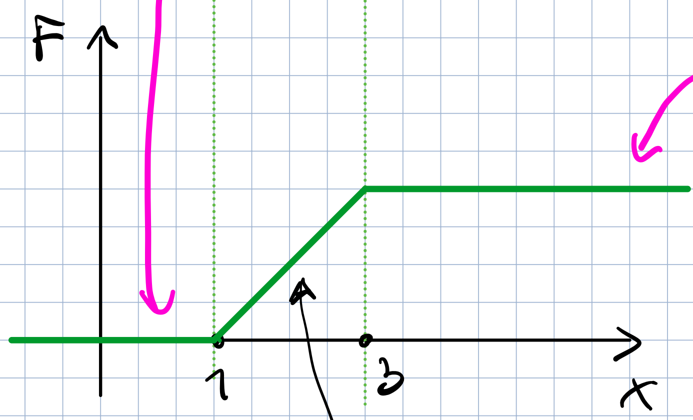
по следица:

3° $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X \le c) + P(c < X \le b)$$

Пример. Ако је дато f нацртати график за F.





Шта је са средином?

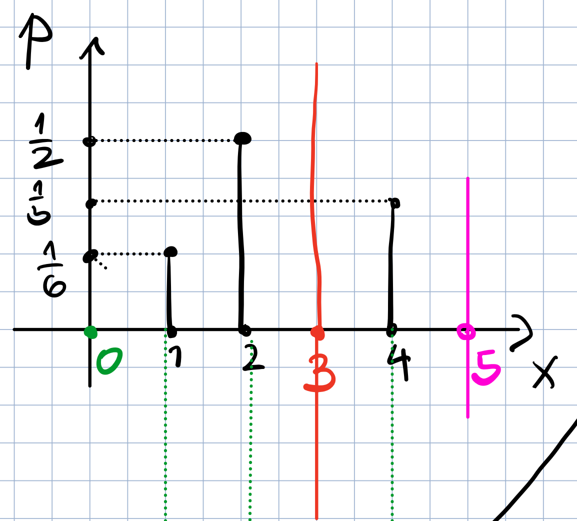
$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = \int_{1}^{a} f_X(t)\,dt=\int_{1}^{a}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot t\Big|_{1}^{a}=\frac{1}{2}(a-1)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{1} f = 0$$

j-на праве $F(a)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$, тј. $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Пример. Шта је са дискретним случајем?



Оно где је интеграл код непр. сл. вел. ту прелазимо у Σ код дискретне

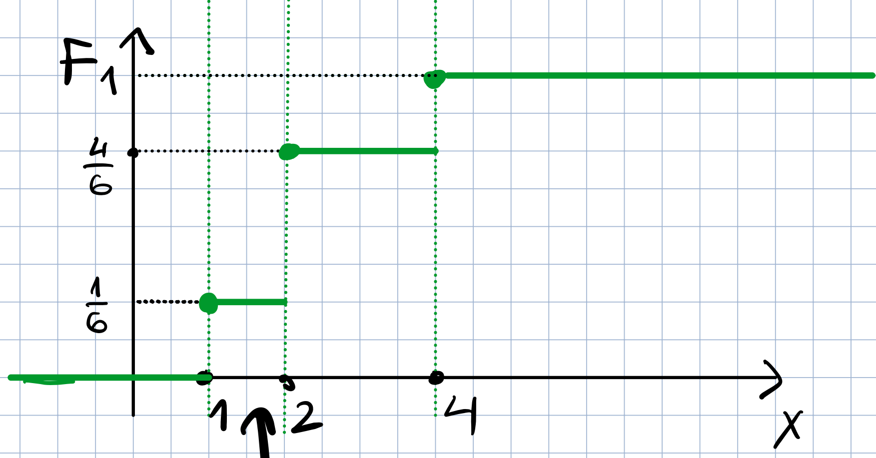
$F_X(x)=P(X\le x)$ ← то је деф.

$$F_X(3)\overset{?}{=}P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{X\le x} p_X(x)$$

$$F_X(5)=P(X\le 5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1$$

$$F_X(0)=P(X\le 0)=0$$



← степенаста ф-ја

шта се овде дешава?

$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X=1) = \frac{1}{6}$

$F_X(1{,}5) = P(X \le 1{,}5) = P(X=1) = \frac{1}{6}$ ← ништа се не мења до 2

$F_X(2) = P(X \le 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$

$F_X(4) = P(X \le 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=4) = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{4}{6}, & 2 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ

ДИСКРЕТАН СЛ.

$$E(X) = \sum x \cdot p_X(x)$$

НЕПРЕКИДНИ СЛ.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

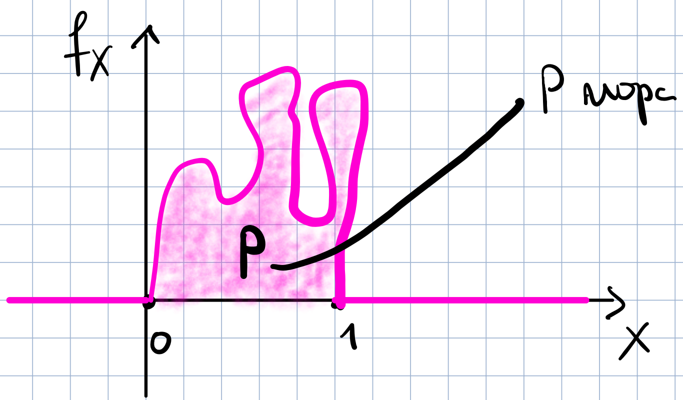
ДИСПЕРЗИЈА

$$D(X) = \sigma^2 = \sum (x - E(X))^2 \cdot p_X(x)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Пример Одредити a тако да је $f_X(x)=\begin{cases} ax^2, & 0\le X<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ функција густине расподеле вероватноћа непр. сл. променљиве. Затим, наћи ф-ју расподеле F и израчунати $P(0<X<1/2)$.



бити $=1$

$$P=\int_0^1 a\cdot x^2\,dx = a\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{a}{3}(1^3-0^3)=\frac{a}{3}$$

$$\frac{a}{3}=1$$

треба да $\Rightarrow$ $a=3$

$$\Rightarrow \quad f_X(x)=\begin{cases} 3X^2, & 0\le X<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

F?

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ x^3, & 0\le x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} 3t^2\,dt = \int_0^x 3t^2\,dt = \cancel{3}\cdot\frac{t^3}{\cancel{3}}\Big|_0^x = x^3$$

$$P\left(0<X<\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0^3 = \frac{1}{8}$$

у интервалу

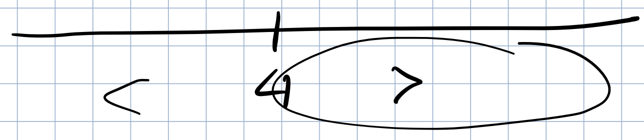
$0\le X<1$

$$P\left(\frac{1}{2}<X<3\right) = F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

вредности за F очитавамо горе

$$P\left(X>\frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(X\le\frac{1}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \ldots$$

не пише $<$?!?



EXAM:

18. дец. среда 16-18ч ,Велики амфитеатар