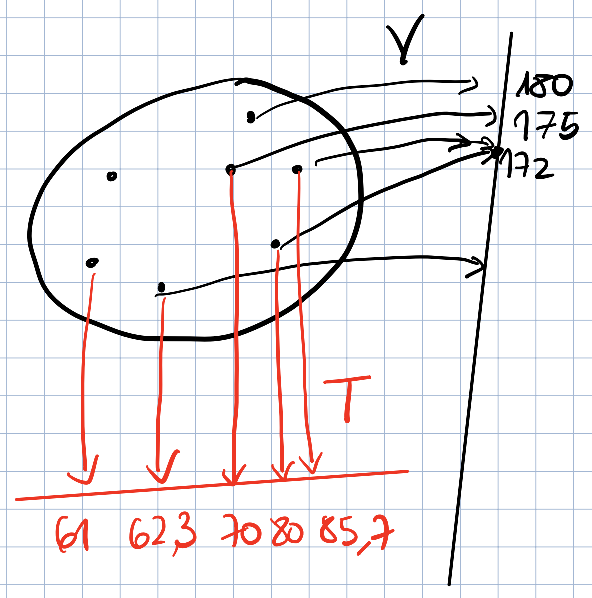
Random variables

- An assignment of a value (number) to every possible outcome
- Mathematically: A function from the sample space Ω to the real numbers
  - discrete or continuous values
- Can have several random variables defined on the same sample space
- Notation:
  - random variable X
  - numerical value x

СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ



ДЕФ: ... ф-ја ... СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА (СЛУЧАЈНА ВЕЛИЧИНА)

$$X : E \to \mathbb{R}$$

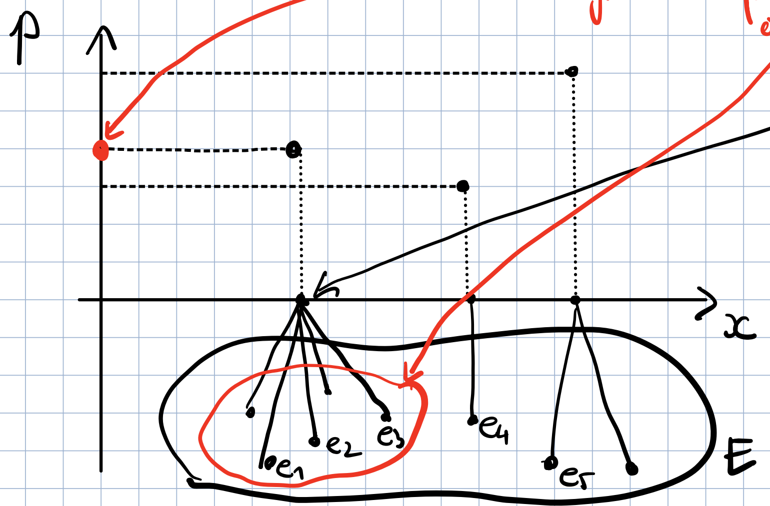
$$X(e) = r \in \mathbb{R}$$

- ДИСКРЕТНА (прекидна)
- НЕПРЕКИДНА (континуална)

Ознака: X – случајна променљива (функција)

x – нумеричка вредност, тј. број $\in \mathbb{R}$ $\Big\}$ $X(e) = x$, $x \in \mathbb{R}$

сума вероватноћа за елементе овог догађаја



нпр. питамо се која је вероватноћа да наша сл. променљива узме неку вредност?

Probability mass function (PMF)

- ("probability law", "probability distribution" of X)
- Notation:

$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ s.t. } X(\omega) = x\})$$

- $p_X(x) \geq 0 \qquad \sum_x p_X(x) = 1$
- **Example:** X=number of coin tosses until first head
  - assume independent tosses, $\mathbf{P}(H) = p > 0$

$$p_X(k) = \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(TT\cdots TH) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

  - **geometric** PMF

$$p_X(\overset{\downarrow}{x}) = P(X=x) = P(\{e \in E \mid X(e) = x\})$$

Ф-ЈА КОЈА ОПИСУЈЕ:
„РАСПОДЕЛА ВЕРОВАТНОЋА"

ОСОБИНЕ:

1° $p_X(x) \geq 0$

2° $\sum_x p_X(x) = 1$

Пример 1. Коцка за игру се баца 1x и резултати се може описати сл. величином X. Одредити закон расподеле вероватноћа:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$P(X=1)$ $\qquad$ $P(X=2) = p_X(x=2)$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$p_i = P(X = x_i)$

Пример 2: X је сл. вел. која описује број бац. нов. до појаве прве Г.

пп. да су бацања независна, $P(G) = p > 0$

$P(Г) = p$

Сви исходи:

Г

ПГ

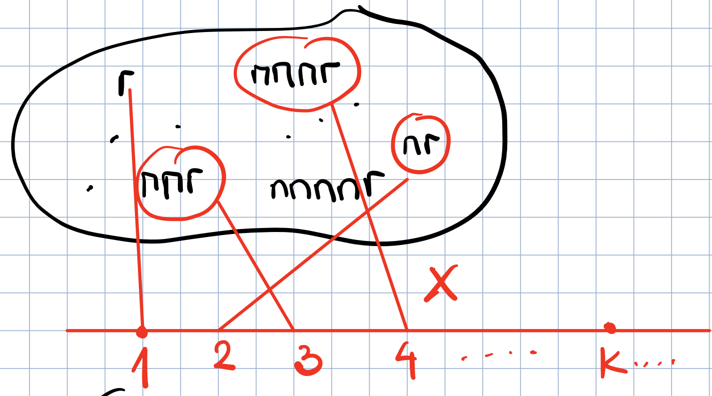
ППГ

ПППГ

ППППГ

⋮

$\underbrace{\text{ППП}\ldots\text{П}}_{k-1}\text{Г}$



$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & k & \cdots \\ \boxed{} & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Шта је са p?

Како је $p(X=1) = p(\text{"Г"}) = p$

$p(X=2) = p(\text{"ПГ"}) = (1-p)\cdot p$

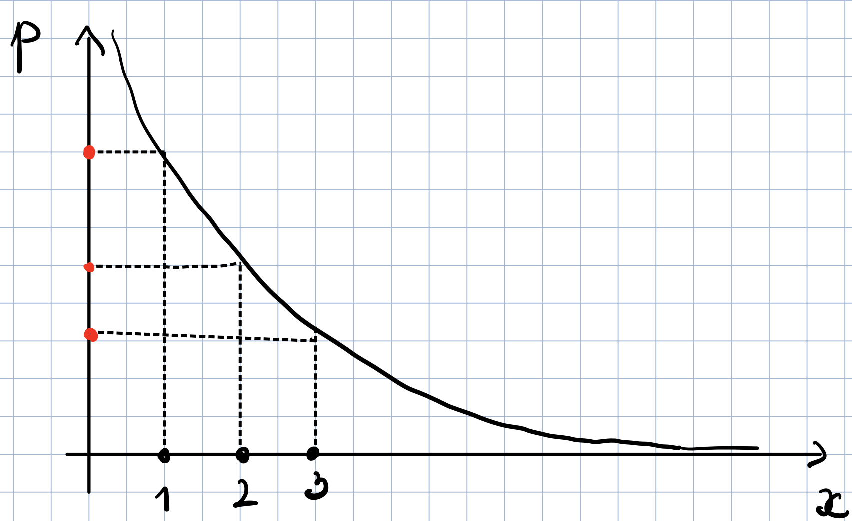
$p(X=3) = p(\text{"ППГ"}) = (1-p)^2\cdot p$

⋮

$p(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$, $k=1,2,\ldots$

$$\boxed{X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ p & (1-p)\cdot p & (1-p)^2\cdot p & \cdots & (1-p)^{k-1}\cdot p & \end{pmatrix}}$$

Формула за ГЕОМЕТРИЈСКУ РАСПОДЕЛУ



How to compute a PMF $p_X(x)$

- collect all possible outcomes for which X is equal to x
- add their probabilities
- repeat for all x

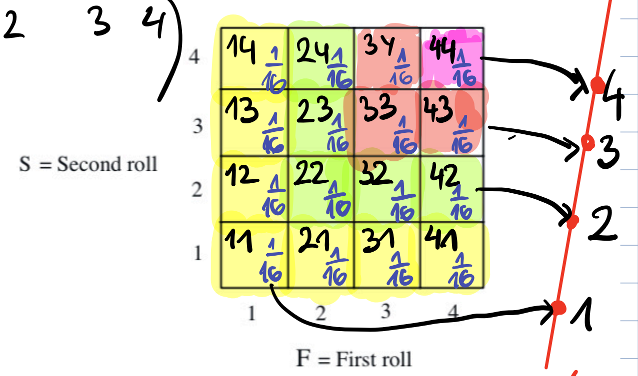
- **Example:** Two independent rools of a fair tetrahedral die

F: outcome of first throw
S: outcome of second throw
$X = \min(F, S)$

Пример: 2 независна бацања тетраедалне коцке.

F: исход првог бацања
S: исход другог бацања
X: min (F, S)

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Написати расподелу вер. за F

$$F: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

за S ?

$$S: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$p_F(2) = \frac{1}{4}$ $\quad P(F>2) = P(F=3) + P(F=4) = \frac{2}{4}$

$p_X(2) = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \longrightarrow \Sigma \overset{?}{=} 1$$

$X \sim G(p)$

БЕРНУЛИЈЕВ ЕКСПЕРИМЕНТ: је низ експеримен. са два могућа исхода који се изводе под истим условима, а догађаји из различитих експ. су НЕЗАВИСНИ. Најчешће један од исхода зовемо УСПЕХОМ, а други неуспехом.

ГЕОМЕТРИЈСКА РАСПОДЕЛА: Берн. експ. са вероватноћом успеха p се изводи ДО ПРВОГ УСПЕХА. Сл. величина која описује број понављања експер. има ГЕОМЕТРИЈСКУ РАСП.

Означавамо $X \sim G(p)$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ p & (1-p)\cdot p & (1-p)^2\cdot p & \cdots & (1-p)^{k-1}\cdot p & \end{pmatrix}$$

нпр: $Y \sim G(0{,}2)$

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0{,}8\cdot 0{,}2 & 0{,}8^2\cdot 0{,}2 \end{pmatrix}$$

БИНОМНА РАСПОДЕЛА (БЕРНУЛИЈЕВА)

Берн. експ. са вероватноћом успеха p се изводе:

- n пута
- од којих је k-успеха.

Сл. величина X која описује број успеха има БИНОМНУ **РАСПОДЕЛУ**

Binomial PMF

- X: number of heads in n independent coin tosses
- $P(H) = p$
- Let $n = 4$ — радимо за мало n, за почетак

$$p_X(2) = \underset{ГГПП}{P(HHTT)} + \underset{ГПГП}{P(HTHT)} + \underset{ГППГ}{P(HTTH)} + \underset{ПГГП}{P(THHT)} + \underset{ПГПГ}{P(THTH)} + \underset{ППГГ}{P(TTHH)}$$

која је p да је ГЛАВА пала 2 пута

$$= 6p^2(1-p)^2$$

$$= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{2}, \quad 2 = 4-2$$

In general:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

пример: Бацамо новчић n пута. Нека је X број колико је пута пало ГЛАВА (што нам је успех).

$$p(Г) = p$$

$n=4$:

$$p(ГГПП) = p\cdot p(1-p)(1-p) = p^2(1-p)^2$$

$$p(ПГПГ) = p^2(1-p)^2$$

вероватноће су исте

Одакле 6? Како на 4 места распоредити 2 пала?
$\binom{4}{2}$

У општем случају, за било које n;

$$p_X(2)=\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}$$

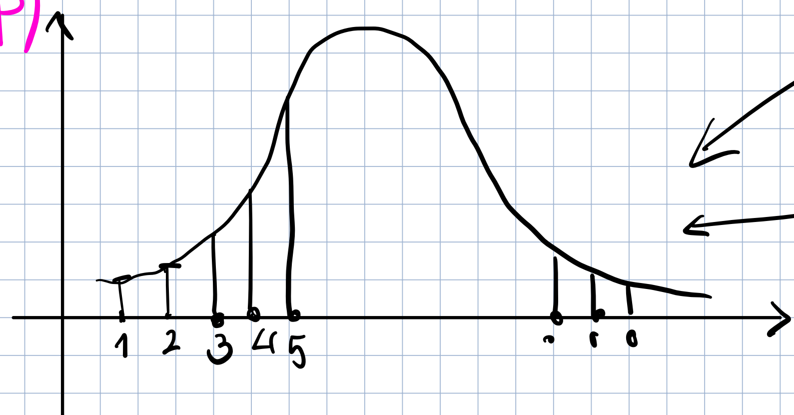
Још општије: уместо 2 пале, посматрамо k-пала

$$p_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ \underbrace{\binom{n}{0}p^0(1-p)^n}_{(1-p)^n} & \binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1} & \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} & \cdots & \underbrace{\binom{n}{n}p^n(1-p)^0}_{p^n} \end{pmatrix}$$

БИНОМНА РАСПОДЕЛА

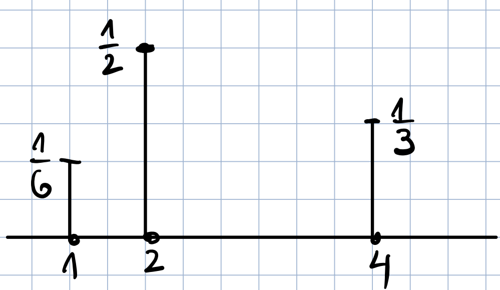
$X \sim B(n,p)$



када је n-велико

BELL CURVE

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ
(EXPECTATION)



$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{1}{6}+1+\frac{4}{3}=\frac{15}{6}=2{,}5$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{6}{6}+\frac{8}{6}=\frac{15}{6}$$

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow = p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+p_3\cdot x_3=$$

$= p_X(x_1)\cdot x_1 + p_X(x_2)\cdot x_2 + p_X(x_3)\cdot x_3$

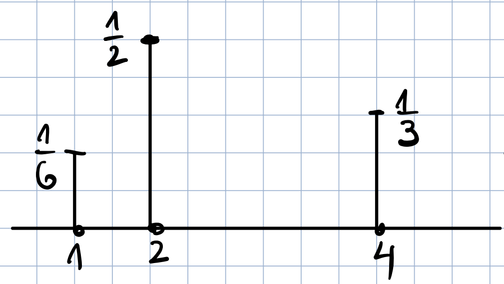
Када смо:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{1+2+4}{3}$$

↓ ми "пондерисани" просек,

додајемо "пондере" сабирцима.



Математичко очекивање показује где је ЦЕНТАР МАСЕ система

ДЕФИНИЦИЈА: Матем. очекивање се одр. формом

$$E(X) = \sum_x x\cdot p_X(x)$$

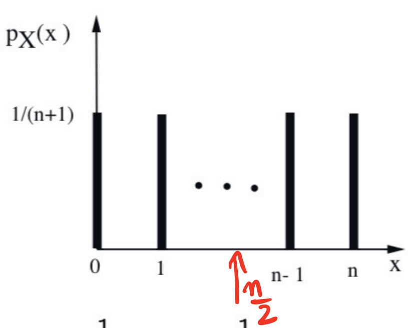
Expectation

- Definition:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_x x p_X(x)$$

- Interpretations:
  - Center of gravity of PMF
  - Average in large number of repetitions of the experiment (to be substantiated later in this course)

- Example: Uniform on $0, 1, \ldots, n$



$$\mathbf{E}[X] = 0\times\frac{1}{n+1} + 1\times\frac{1}{n+1} + \cdots + n\times\frac{1}{n+1} =$$

центар масе? $\frac{n}{2}$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

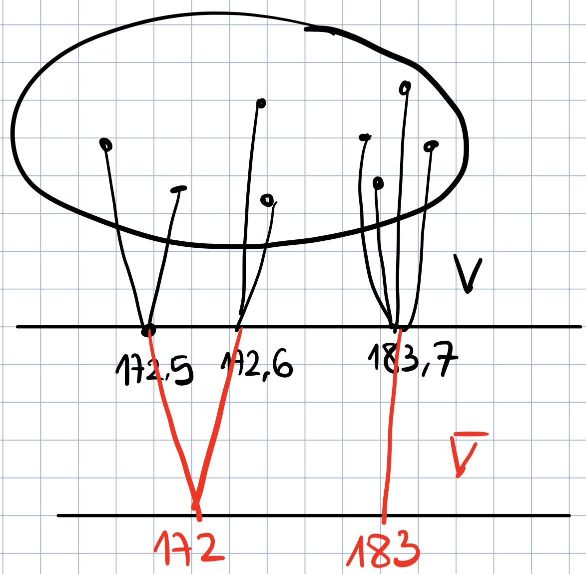
$$E(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 =$$

$$= \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$I_A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ $\qquad E(I_A) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$

индикаторска
сл. вел.

ОСОБИНЕ МАТЕМ. ОЧЕКИВАЊА



Ф-ја сл. величине је такође сл. величина
$Y = g(X)$

Пример: Нека је дата $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$. Одредити $E(X^2)$.

$Y = X^2$

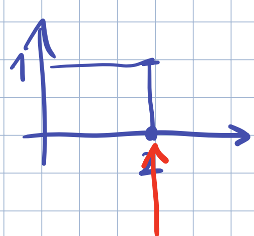
такође сл. величина:

$Y: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$

$E(X^2) = E(Y) = 1\cdot 0,1 + 4\cdot 0,3 + 9\cdot 0,6 = 6,7$

ОСОБИНЕ

$E(2)$



$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1° $E(\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2° $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

3° $E(\alpha X + \beta) = E(\alpha X) + E(\beta) = \alpha \cdot E(X) + \beta$

4° $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

5° Ако су X и Y независне сл. вел:

$E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$

6° Ако је $Y = g(X)$ онда $E(Y) = \sum_x g(x)\cdot p_X(x)$

Дисперзија (варијанса, расипање,...)

Variance

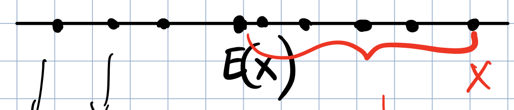
Recall: $\mathbf{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$

- **Second moment:** $\mathbf{E}[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x)$
- **Variance**

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] \\ &= \sum_x (x - \mathbf{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2\end{aligned}$$

Properties:

- $\text{var}(X) \geq 0$
- $\text{var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \text{var}(X)$



$$E(X - E(X)) = E(X) - E(\underbrace{E(X)}) = E(X) - E(X) = 0$$

Идеја је да дисперзију дефинишемо као

$$E\left((X - E(X))^2\right)$$

МЕРА КОЛИКО ЈЕ РАШИРЕНА НЕКА РАСПОДЕЛА.

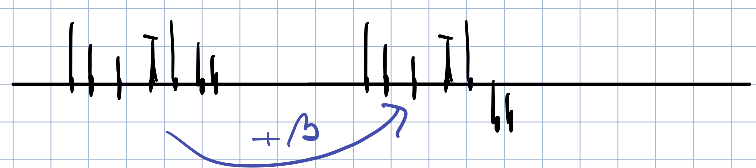
ДЕФ: Дисперзија се одређује по формули

$$\boxed{D(X) := E\left((X - E(X))^2\right)} \left(= Var(X)\right)$$

$$= \vdots \quad \leftarrow \text{може се показати..}$$

$$= \boxed{E(X^2) - (E(X))^2}$$

ОСОБИНЕ



1° $D(X) \geq 0$

2° $D(\alpha) = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$

3° $D(\alpha X + \beta) = D(\alpha X) = \alpha^2 \cdot D(X)$

4° X, Y независне $\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$$

УСЛОВНА РАСПОДЕЛА И ОЧЕКИВАЊЕ

Conditional PMF and expectation

- $p_{X|A}(x) = \mathbf{P}(X = x \mid A)$
- $\mathbf{E}[X \mid A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$

- Let $A = \{X \geq 2\}$

$p_{X|A}(x) =$

$\mathbf{E}[X \mid A] =$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \ldots = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$A = $ "$X \geq 2$"

Koje je sada očekivanje za X?

$E(X \mid A)$?

$= \sum x \cdot p_{X|A}(x)$

$$X|A: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$p(X=2 \mid A)$ $\quad$ $p(X=3 \mid A)$

А може и нормирањем вероватноћа:

Почетне вероватноће:

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \longrightarrow X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$p(X=2 \mid A) = \frac{P(X=2 \wedge A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$X|A: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow E(X|A) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 4 = 3$

<u>пример 1</u> Нека су Y_1, Y_2, Y_3 независне Бернулијеве сл. вел. са расподелом $Y_i: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Ако је $Y = Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3$ одредити

а) $P(Y=0)$

б) $P(Y_2=0 \mid Y=0)$

в) $E(Y_2 \mid Y=0)$

HOMEWORK