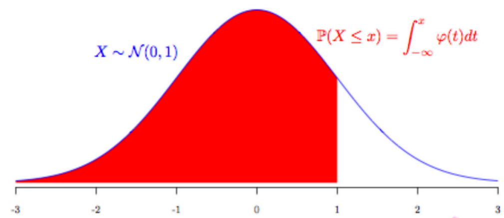
05-12. 2023.



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

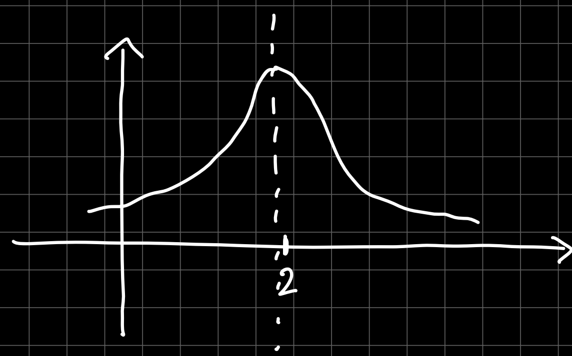
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$P(X \le 0{,}67) = 0{,}7486$

$0{,}6 \quad 0{,}07$

Шта ако?

$X \sim \mathcal{N}(2, \underbrace{16}_{4^2})$



$P(-x) \neq 1 - P(x)$ јер овај пут није симетрична

$P(X \le 3) = ?$ ← Како да искористимо таблицу

Посматрамо $Y = \dfrac{X-2}{4}$.

– Y је такође сл. величина са нормалном расподелом (лин. трансф. X)

$Y \sim \mathcal{N}(?, ?)$ ← $E(Y)$, $D(Y)$

$X \sim \mathcal{N}(2,16)$?

$E(Y)$?

$$E(Y) = E\left(\frac{X-2}{4}\right) = \frac{1}{4} E(X-2) = \frac{1}{4}\left(E(X) - E(2)\right) = \frac{1}{4}(\underbrace{E(X)}_{2} - 2) = 0$$

$E(Y) = 0$

$D(Y)$

$$D(Y) = D\left(\frac{X-2}{4}\right) = \frac{1}{4^2} D(X-2) = \frac{1}{4^2} D(X) = \frac{1}{4^2} \cdot 16 = 1$$

?

$D(Y) = 1$

$Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Уопштено:

Ако $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X-\mu}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}(0,1)$ доказ сличан

$P(X\le 3) = P(X-2 \le 3-2) = P\left(\frac{X-2}{4} \le \frac{3-2}{4}\right) = P\left(Y \le \frac{1}{4}\right)$

наводимо на $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

ово тражимо у табели!

$0{,}25$

$= 0{,}5987$

Дакле $P(X\le 3) = 0{,}5987$

Ако сл. величина X има нормалну расп. $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, тада сл. променљива Y има СТАНДАРДНУ нормалну расп. $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ ако је $\boxed{Y = \frac{X-\mu}{\sigma}}$

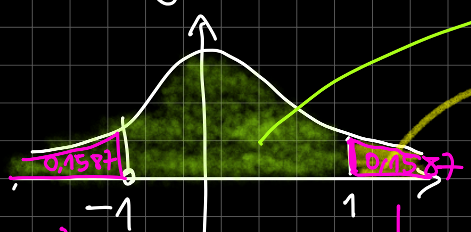
СТАНДАРДИЗАЦИЈА

пример: $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, $Y\sim\mathcal{N}(1,4)$

а) $P(X\le 1{,}5)$ и $P(X\le -1)$

врста $1{,}5$
колона $0{,}00$ $\Big\}$ $P(X\le 1{,}5) = 0{,}9332$

$P(X\le -1)$



$= 1 - P(X\le 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

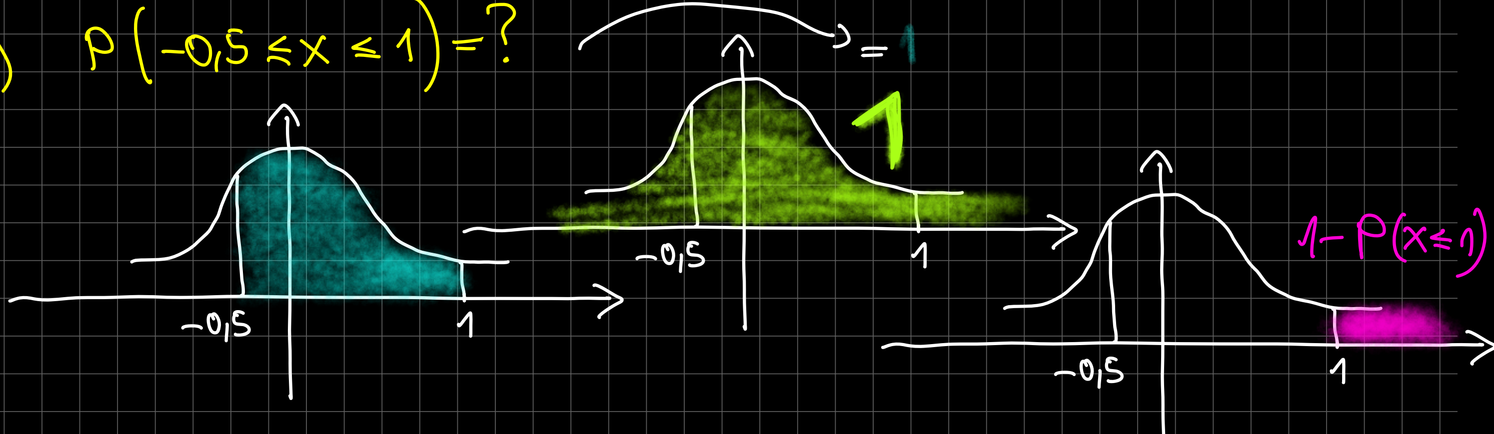
$F(1)$

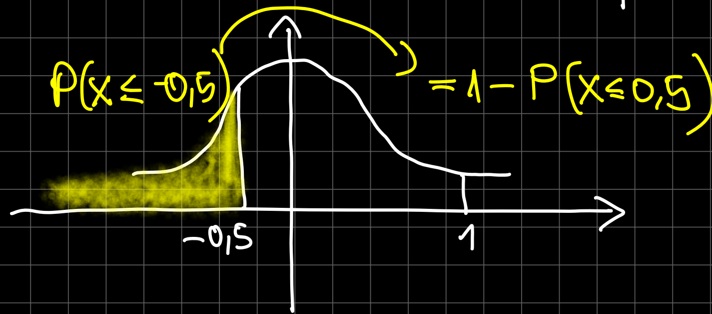
из таблице читамо $0{,}8413$
врста $= 1.00$
колона 0.00

$P(X\le -1) = P(X\ge 1)$

$P(X\le -1) = 0{,}1587$

б) $P(-0{,}5 \le X \le 1) = ?$





ПЛАВА + ЖУТА + РОЗА = ЗЕЛЕНА

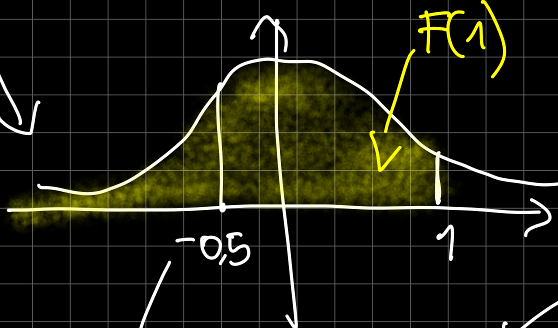
$$P(-0{,}5 \leq X \leq 1) = 1 - \Big(1 - \overbrace{P(X \leq 0{,}5)}^{F(0{,}5)}\Big) - \Big(1 - \overbrace{P(X \leq 1)}^{F(1)}\Big)$$

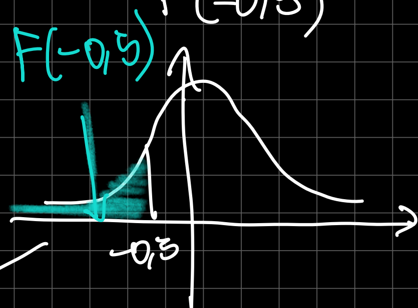
$$= 1 - 1 + F(0{,}5) - 1 + F(1)$$

$$= F(1) + F(0{,}5) - 1$$

тешко научити напамет

$$= F(1) - \big(\underbrace{1 - F(0{,}5)}_{F(-0{,}5)}\big)$$



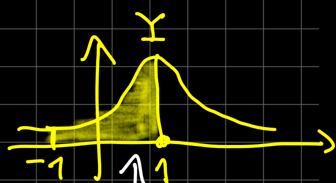


$$= F(1) - F(-0{,}5)$$

$$= F(1) - (1 - F(0{,}5))$$

$$= 0{,}8413 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}5328$$

б) $P(-1 \leq Y \leq 1) = ?$ $\quad = P(Y \leq 1) - P(Y \leq -1)$



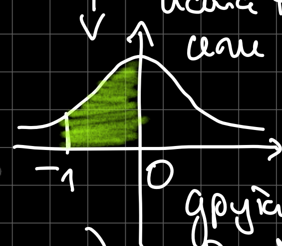
ово није $F(1)$!

није $F(-1)$!

$Y \sim \mathcal{N}(1,4)$ јер $Y \nsim \mathcal{N}(0,1)$

али $\dfrac{Y-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$

добија се иста P, али су



другачији граф.

$$= P\left(\frac{-1-1}{2} \leq \frac{Y-1}{2} \leq \frac{1-1}{2}\right) = P(-1 \leq Y^* \leq 0)$$

$$Y^* \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= F(0) - F(-1) = F(0) - (1 - F(1)) = F(0) - 1 + F(1)$$

$$= 0{,}5 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}3413$$

1.Težina odredjene grupe dece u vrtiću normalno je raspoređena sa matematičkim očekivanjem 15kg i standardnom devijacijom (odstupanjem) od 3kg. Kolika je verovatnoća da če slučajno izabrano dete imati težinu između 11kg i 17kg?

2. Vreme čekanja lifta je slučajna promenljiva normalno raspoređena sa srednjom vrednosti 1.5min, a standardnom devijacijom od 20 sekundi:

A) naći verovatnoću da neko čeka lift duže od 2 minuta i 10 sekundi

B) Naći verovatnoću da neko čeka lift manje od 1 minuta i 10 sekundi

C) Posmatrano je 100 ljudi koji čekaju lift. Odrediti broj ljudi koji su lift čekali manje od 50 sekundi.

1° $X \sim \mathcal{N}(15, 3^2)$

$$P(11 \le X \le 17) = P\left(\frac{11-15}{3} \le X^* \le \frac{17-15}{3}\right) = P\left(-\frac{4}{3} \le X^* \le \frac{2}{3}\right)$$

$\frac{X-15}{3}$

$$= P(-1{,}33 \le X^* \le 0{,}67)$$
$$= F(0{,}67) - F(-1{,}33)$$
$$= F(0{,}67) - (1 - F(1{,}33))$$
$$= F(0{,}67) - 1 + F(1{,}33)$$
$$= 0{,}7486 - 1 + 0{,}9082 = 0{,}6568$$

2° $X \sim \mathcal{N}(90, 20^2)$

A) $$P(X \ge 130) = 1 - P(X \le 130) = 1 - P\left(\frac{X-90}{20} \le \frac{130-90}{20}\right)$$

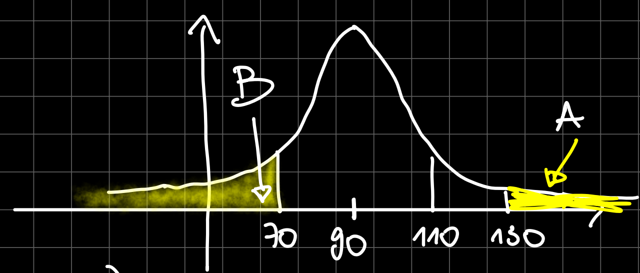
знак је ≥!

може ≤ и <!

$$= 1 - P(X^* \le 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

има у таблици

B) очекујемо да ће бити већа вероватноћа



$$P(X \le 70) = P\left(\frac{X-90}{20} \le \frac{70-90}{20}\right) = P(X^* \le -1) = F(-1)$$
$$= 1 - F(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

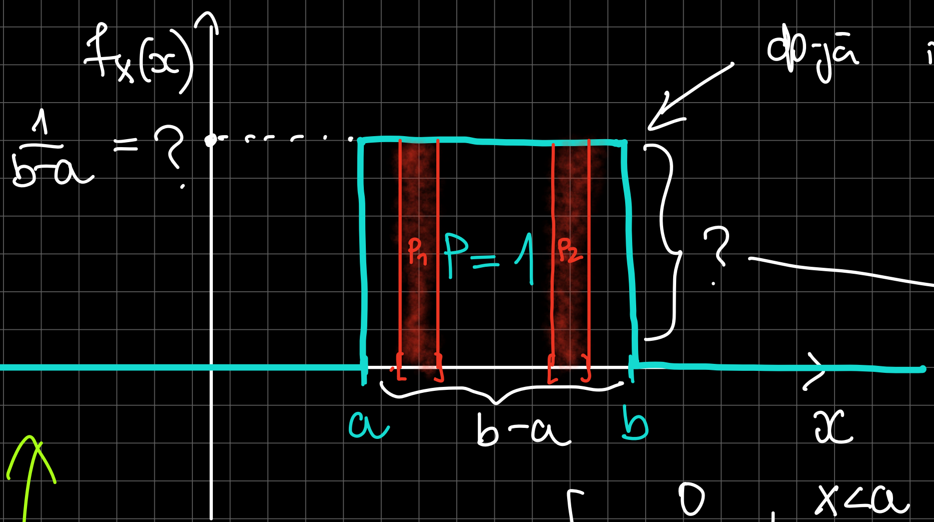
c) $$P(X < 50) = P\left(X^* < \frac{50-90}{20}\right) = P(X^* < -2) = F(-2) = 1 - F(2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

$p = 0{,}0228$

Колико је људи чекало испод 50 секунди?

$0{,}0228 \cdot 100 = 2{,}28$ људи

УНИФОРМНА СЛУЧАЈНА ВЕЛИЧИНА



ф-ја густине =0 ван одсечка [a, b], а унутар њега је константна!

$(b-a) \cdot h = 1$

$\Rightarrow h = \frac{1}{b-a}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

сл. величина X која има овакву ф-ју густине има УНИФОРМНУ РАСПОДЕЛУ и записујемо $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

$E(X) = ?$ $\int f_X(x) \cdot x \, dx \; . . . .$

а може и преко центра масе који је у $\frac{a+b}{2}$

МАРКОВЉЕВИ ПРОЦЕСИ

примери: У продавници смо, стојимо у реду и чекамо да будемо услужени, један по један...

долазак у ред: вероватноћа p

одлазак из реда (услуживање): вероватноћа q

СТАЊЕ СИСТЕМ?

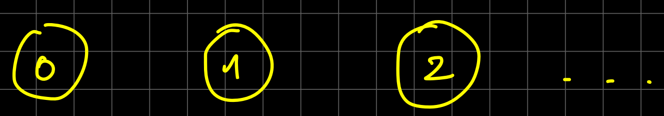
-- било које својство у НЕКОМ ТРЕНУТКУ које нам даје релевантну инф. о стварима које се могу десити у будућности

ново стање = f (старо стање)

X_n: {број људи у реду}

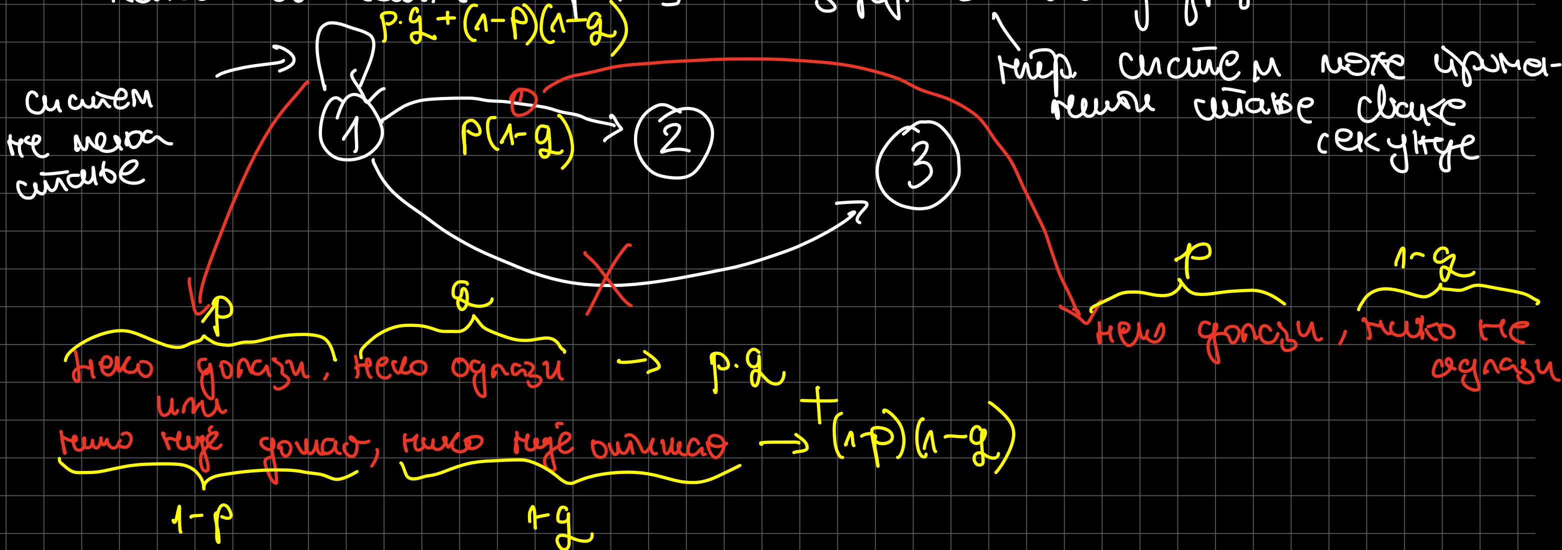
p – неко долази

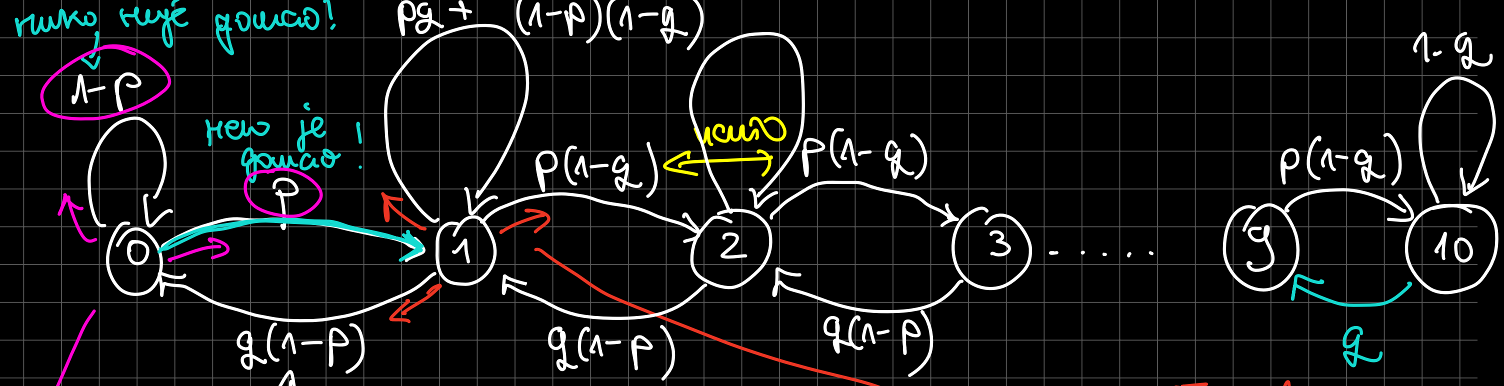
q – неко одлази



Како описати прелазак из једног стања у други?

јер систем може проме- нити стање сваке секунде





$\underbrace{\text{неко одлази}}_{g}$, $\underbrace{\text{нико не долази}}_{1-p}$

$\Sigma p = 1$? $1-p+p=1$ ✓

проверано ли $\Sigma p = 1$

$g(1-p) + pg + (1-p)(1-g) + p(1-g)$

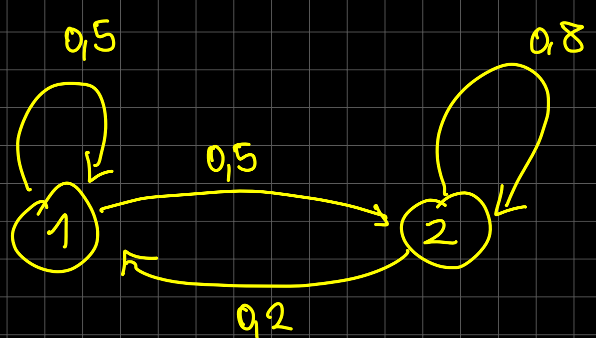
$g - \cancel{pg} + \cancel{pg} + 1 - g - p + \cancel{pg} + p - \cancel{pg}$

Марковљев ланац у дискретном времену са коначним бројем стања.

СПЕЦИФИКАЦИЈА МОДЕЛА:

- одредити која ће нам сл. величина представљати стања
- одредити могуће прелазе
- одредити вероватноће прелазака у стања

пример:



$r_{mn}(k)$

↓

прелазак из стања m у n из k-корака

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$r_{11}(n)$	1	0,5	$0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}2$
$r_{12}(n)$	0	0,5	$0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}8$
$r_{21}(n)$	0	0,2	$0{,}8\cdot 0{,}2 + 0{,}2\cdot 0{,}5$
$r_{22}(n)$	1	0,8	$0{,}8\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}5$

$r_{11}(0) \leftarrow$ вероватноћа преласка из 1 у 1 у 0 корака

МАРКОВЉЕВО СВОЈСТВО:

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$
$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = l, X_{n-2} = k, \ldots)$$