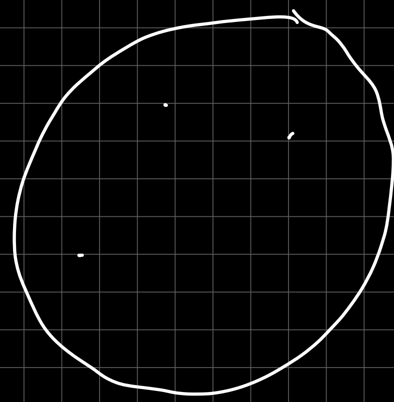
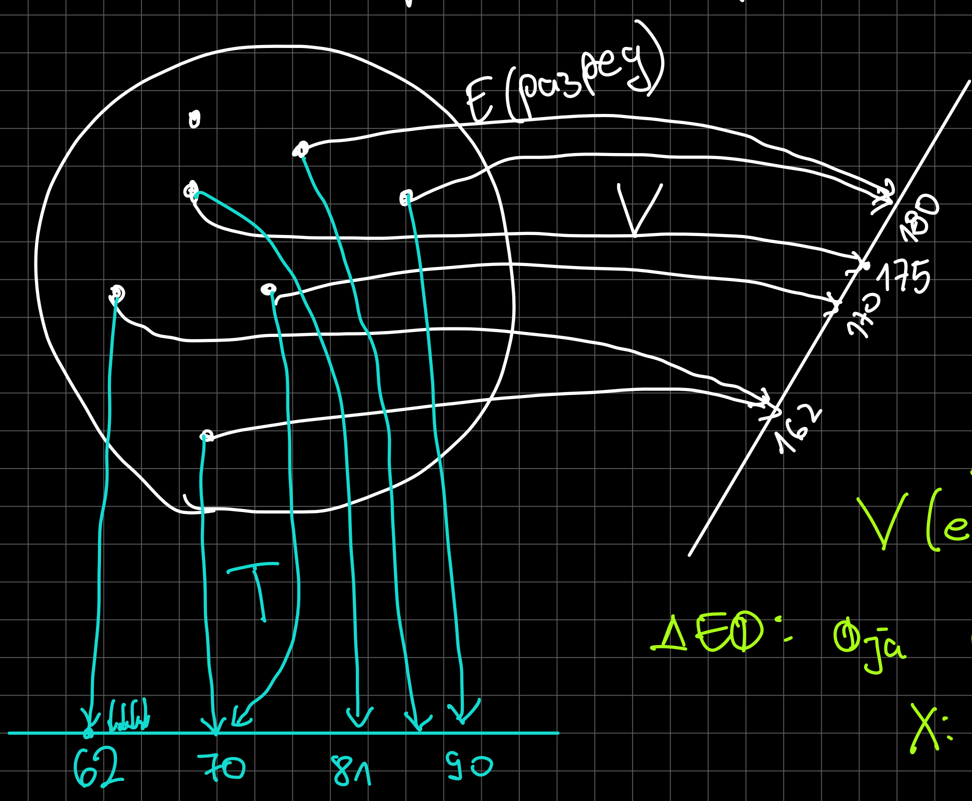
Random variables

- An assignment of a value (number) to every possible outcome
- Mathematically: A function from the sample space Ω to the real numbers
  - discrete or continuous values
- Can have several random variables defined on the same sample space
- Notation:
  - random variable X
  - numerical value x

СЛУЧАЈНЕ ВЕЛИЧИНЕ (ПРОМЕНЉИВЕ)



Придружујемо број сваком могућем исходу.



X – ДИСКРЕТНА (ПРЕКИДНА)
(заокружили смо тежину на целе kg)
– НЕПРЕКИДНА (КОНТИНУАЛНА)

$e \in E$

$V(e) = v$

ДЕФ: Ф-ја која пресл. $E \to \mathbb{R}$

$X: E \to \mathbb{R}$

$X(e) = x$

Probability mass function (PMF)

- ("probability law",
  "probability distribution" of X)

- Notation:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \mathbf{P}(X = x) \\ &= \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \text{ s.t. } X(\omega) = x\}) \end{aligned}$$

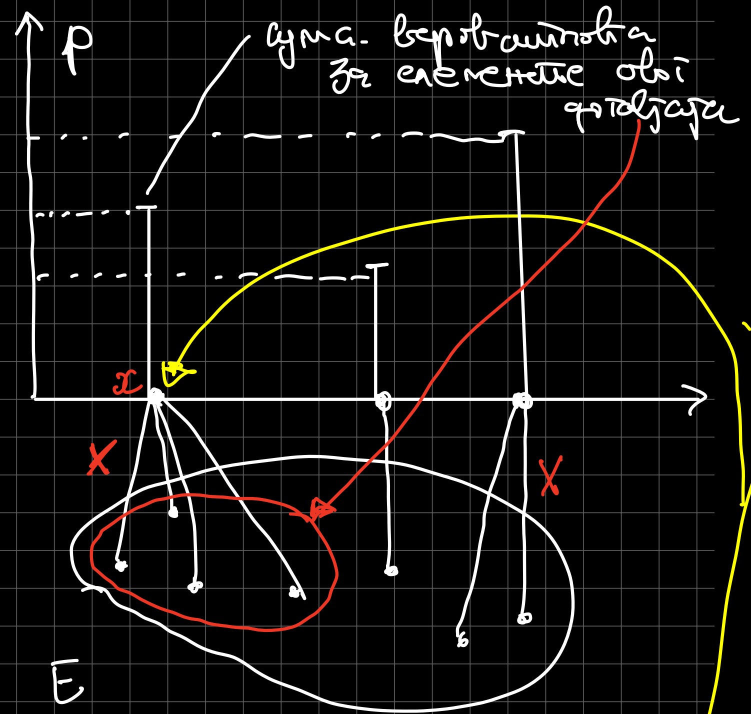
ОСОБИНЕ:

- $p_X(x) \geq 0 \qquad \sum_x p_X(x) = 1$

- **Example:** X=number of coin tosses until first head
  - assume independent tosses, $\mathbf{P}(H) = p > 0$

$$\begin{aligned} p_X(k) &= \mathbf{P}(X = k) \\ &= \mathbf{P}(TT\cdots TH) \\ &= (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

  - **geometric** PMF



Која је верoв. да сл. величина узме неку вредност (одавде)

дефинишемо:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= P(X = x) \\ &= P(\{e \in E \mid X(e) = x\}) \end{aligned}$$

PMF

Ово је ф-ја која описује РАСПОДЕЛУ вероватноћа

пример: Коцка за игру се баца 1x и резултат се може описати сл. величином:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$p_X(1) \qquad p_X(4) = P(X = 4)$$

пример: Нека је X сл. величина која описује број бацања до прве главе. $p(G) = p > 0$

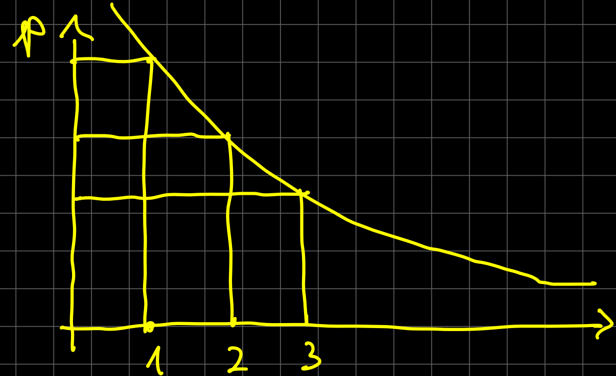
могући исходи	X
G	1
PG	2
PPG	3
PPPG	4
⋮	⋮
$\underbrace{PP\ldots P}_{k-1}G$	k

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ p & (1-p)p & (1-p)^2p & \cdots & (1-p)^{k-1}\cdot p \end{pmatrix}$$

$k=1,2,\ldots,$

$$P(X=1)=P(G)=p$$
$$P(X=2)=P(PG)=(1-p)p$$
$$P(X=3)=P(PPG)=(1-p)^2p$$

ГЕОМЕТРИЈСКА РАСПОДЕЛА



БЕРНУЛИЈЕВИ ЕКСПЕРИМЕНТИ: ...

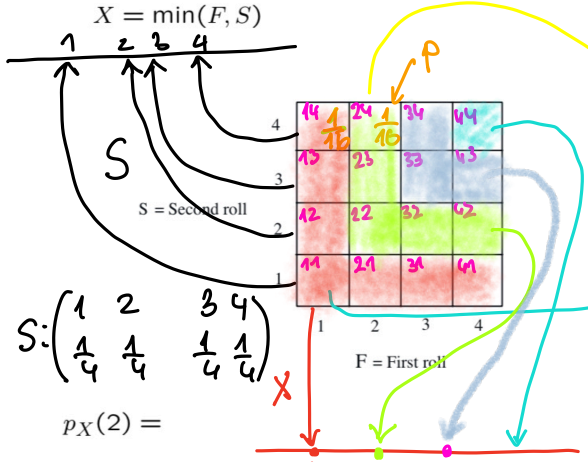
ГЕОМЕТРИЈСКА РАСПОДЕЛА . . .

How to compute a PMF $p_X(x)$

- collect all possible outcomes for which X is equal to x
- add their probabilities
- repeat for all x

- **Example:** Two independent rools of a fair tetrahedral die

  F: outcome of first throw
  S: outcome of second throw
  $X = \min(F, S)$



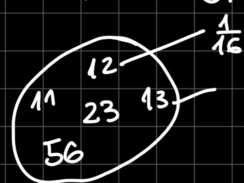
$$S:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$p_X(2) =$

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7\cdot\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$\frac{7+5+3+1}{16} \overset{?}{=} 1$$

$$X \sim G(p)$$



$$F:\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4\cdot\frac{1}{16} & 4\cdot\frac{1}{16} & 4\cdot\frac{1}{16} & 4\cdot\frac{1}{16} \end{pmatrix}}_{=1}$$

БИНОМНА РАСПОДЕЛА

Binomial PMF

- X: number of heads in n independent coin tosses
- $\mathbf{P}(H) = p$
- Let $n = 4$

$$\begin{aligned} p_X(2) &= \overset{p\,p(1-p)(1-p)}{\overset{p^2(1-p)^2}{\mathbf{P}(HHTT)}} + \overset{p(1-p)\cdot p(1-p)}{\overset{p^2(1-p)^2}{\mathbf{P}(HTHT)}} + \overset{p^2(1-p)^2}{\mathbf{P}(HTTH)} \\ &\quad + \mathbf{P}(THHT) + \mathbf{P}(THTH) + \mathbf{P}(TTHH) \\ &= 6p^2(1-p)^2 \\ &= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 \end{aligned}$$

- уместо 4, да имамо n бацања

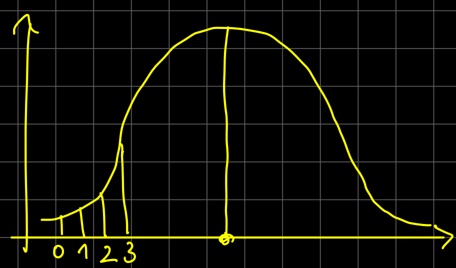
$$\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

- уместо 2, ставимо k пута да је пала глава

In general:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Берн. експерименти са вер. успеха p се изводе n пута.
Сл. величина која описује БРОЈ УСПЕХА има
БИНОМНУ РАСПОДЕЛУ.



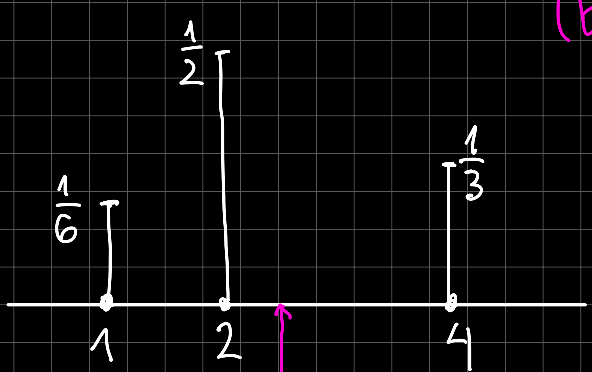
$$\boxed{X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n & \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} & \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} & \cdots & \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \end{pmatrix}}$$

$$\binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \to (1-p)^n \qquad n \cdot p (1-p)^{n-1} \qquad \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \to p^n$$

$$X \sim B(n, p)$$

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ

(EXPECTATION)



E(X) – ЦЕНТАР МАСЕ

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 2{,}5$$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E(X) = \sum_x x \cdot p_X(x)}$$

МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКИВАЊЕ

Expectation

- Definition:

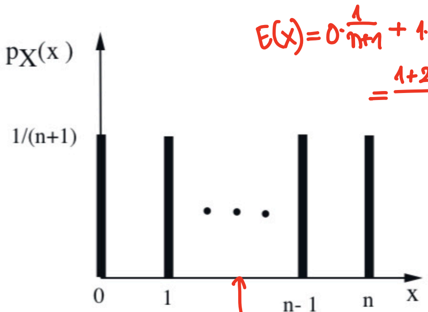
$$\mathbf{E}[X] = \sum_x x p_X(x)$$

- Interpretations:
  - Center of gravity of PMF
  - Average in large number of repetitions of the experiment (to be substantiated later in this course)

- Example: Uniform on $0, 1, \ldots, n$

$$E(x) = 0\cdot\frac{1}{n+1} + 1\cdot\frac{1}{n+1} + 2\cdot\frac{1}{n+1} + \ldots + n\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1+2+\ldots+n}{n+1} = \frac{n}{2}$$



$\frac{n}{2}$ ← центар масе

$$\mathbf{E}[X] = 0\times\frac{1}{n+1} + 1\times\frac{1}{n+1} + \cdots + n\times\frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}$$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

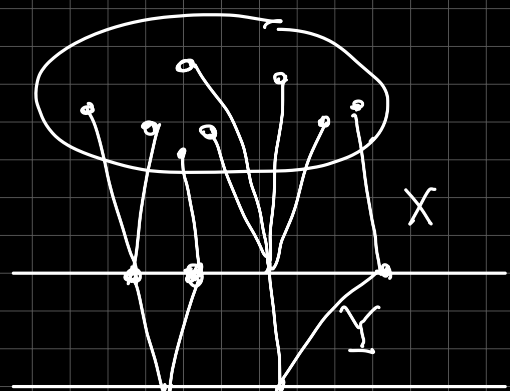
$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \ldots =$$

$$= 3{,}5$$

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$E(I_A) = 0(1-p) + 1\cdot p = p$$

Особине математичког очекивања



$Y = g(X)$

↓

ф-ја случајне величине је такође случајна величина

$E(Y)$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \quad Y = X^2 \quad Y : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \quad E(Y) = 1\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}6$$

$Y=1$ $\downarrow$ 1^2 $P(X=1)$

$Y=4$ $P(X=4)$ 2^2

$$\boxed{E(Y)=\sum_x g(x)\cdot p_X(x)}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1° $E(\alpha)=\alpha$

2° $E(\alpha\cdot X)=\alpha\cdot E(X)$

3° $E(\alpha X+\beta)=E(\alpha X)+E(\beta)=\alpha E(X)+\beta$

4° $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

5° Ако су X и Y независне сл. вел. $\Rightarrow$ $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$

ДИСПЕРЗИЈА (ВАРИЈАНСА)

...РАСИПАЊЕ

Variance

Recall: $\mathbf{E}[g(X)]=\sum_x g(x)p_X(x)$

- **Second moment:** $\mathbf{E}[X^2]=\sum_x x^2 p_X(x)$
- **Variance**

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= \mathbf{E}\left[(X-\mathbf{E}[X])^2\right] \\ &= \sum_x (x-\mathbf{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \mathbf{E}[X^2]-(\mathbf{E}[X])^2\end{aligned}$$

Properties:

- $\text{var}(X)\geq 0$
- $\text{var}(\alpha X+\beta)=\alpha^2\text{var}(X)$

$E(X-E(X))=E(X)-E(E(X))$
$=E(X)-E(X)=0$

Идеја је да дефинишемо

може да се докаже да је $=$

$D:=E\left((X-E(X))^2\right)$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ – ДИСПЕРЗИЈА

Мера колико је раширена нека расподела

ОСОБИНЕ: Var(X)

1° $D(X) \geq 0$

2° $D(\alpha X+\beta) = D(\alpha X) = \alpha^2 D(X)$

3° $D(\alpha) = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$

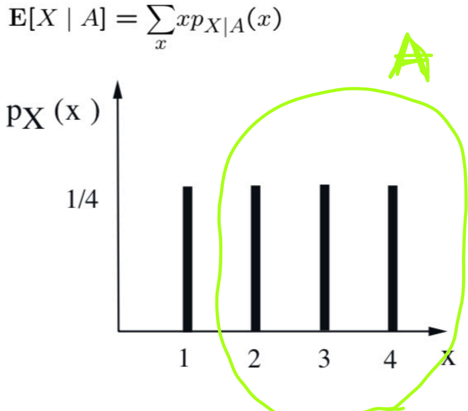
4° X, Y независне: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)}$$

Conditional PMF and expectation

- $p_{X|A}(x) = \mathbf{P}(X = x \mid A)$
- $\mathbf{E}[X \mid A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$



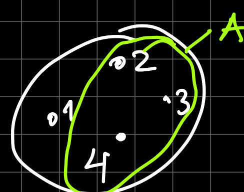
- Let $A = \{X \geq 2\}$

$p_{X|A}(x) =$

$\mathbf{E}[X \mid A] =$

УСЛОВНА РАСПОДЕЛА И ОЧЕКИВАЊЕ

$A = $ "$X \geq 2$"



$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

пондерисали смо вероватноће

$$X|A: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \frac{\frac{1}{4}}{P(A)}$$

$$p(X=2 \mid A) = \frac{P(X=2, A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$E(X \mid A) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$E(X \mid A) = \sum x \cdot p_{X|A}(x)$$

пример1 Y_i, $i\in\{1,2,3\}$ незав. Бернулијеве сл. вел. са расподелом $Y_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Ако је $Y = Y_1 Y_2 Y_3$ одредити:

а) $P(Y=0)$ $= P(000) + P(001) + \dots$ I начин

$Y = Y_1 Y_2 Y_3$

000
001
010
100
101
110
011
111

II начин: $P(Y=0) = 1 - P(Y\neq 0) =$

$= 1 - P(111) =$

$= 1 - P(Y_1=1)P(Y_2=1)\cdot P(Y_3=1)$

$= 1 - 0{,}3\cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}973$

б) $P(Y_2=0 \mid Y=0)$

I начин: Пошто знамо обрнуту усл. вер $\Rightarrow$ Бајес:

$$P(Y_2=0\mid Y=0) = \frac{\overbrace{P(Y=0\mid Y_2=0)}^{=1}\cdot \overset{0{,}7}{P(Y_2=0)}}{\underbrace{P(Y=0)}_{\text{под а)}}} = \frac{0{,}7}{0{,}973} = 0{,}719$$

II начин: $P(Y_2=0\mid Y=0) = \dfrac{P(Y_2=0 \cap Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{P(000)+P(001)+P(100)+P(101)}{0{,}973} =$

000 ←
001 ←
010
100 ←
101 ←
110
011
111

$= \dfrac{0{,}7^3 + 0{,}7^2\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}7^2 + 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}{0{,}973}$

$= \dots = 0{,}719$

в) $E(Y_2 \mid Y=0)$

$Y_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ $\rightarrow P(Y_2=1\mid Y=0)$

$Y_2 \mid Y=0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}281 & 0{,}719 \end{pmatrix}$

$P(Y_2=0\mid Y=0)$ под б

$1 - 0{,}719 = 0{,}281$

$$E(Y_2 \mid Y=0) = 1 \cdot 0{,}281 + 0 \cdot 0{,}719 = 0{,}281$$