

- U kutiji se nalazi 13 kuglica označenih brojevima 1,2,...,13. Na slučajan način je izvučena jedna kuglica. Slučajna promenljiva X uzima vrednost 1 ako je izvučen paran broj, a vrednost 0 ako je izvučen neparan broj. Slučajna promenljiva Y predstavlja ostatak pri deljenju izvučenog broja sa 3.
 - $\boxed{5}$ Odrediti raspodelu dvodimenzione slučajne promenljive (X, Y)
 - $\boxed{2}$ Odrediti $E(X)$ i $E(Y^2)$.
 - $\boxed{3}$ Odrediti $E(X|Y \geq 1)$
 - $\boxed{3}$ Odrediti $E(X + Y)$
 - $\boxed{4}$ Odrediti $E(XY)$. Kada važi da je $E(XY) = E(X)E(Y)$ za proizvoljne X i Y ?
- Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $X \sim N(5, 81)$, odrediti:
 - $\boxed{3}$ $P(X \leq 4)$?
 - $\boxed{3}$ $P(|X| \leq 1)$?
 - $\boxed{3}$ $P(X^2 - 3X \leq -2)$?
 - $\boxed{3}$ Odrediti x takvo da je $P(X \leq x) = 0.9922$.
 - $\boxed{4}$ Odrediti x takvo da je $P(X \leq x) = 0.0749$.
- U ovom zadatku je potrebno predstaviti Markovljevim procesom specijalni slučaj Ehrenfestovog modela, koji se koristi za opisivanje procesa difuzije gasova. U ovom modelu posmatramo dva povezana suda, koji sadrže ukupno 4 molekula gasa. U svakom koraku, jedan od tih 4 molekula gasa biva nasumično odabran, i zatim on prelazi u suprotni sud. Neka svakom stanju odgovara BROJ molekula gasa koji se nalazi u prvom sudu.
 - $\boxed{6}$ Opisati Markovljevim procesom ovaj model.
 - $\boxed{5}$ Ako je proces započet u trenutku kada se u oba suda nalazi podjednako molekula, koja je verovatnoća da će neki sud biti prazan nakon 4 koraka?
 - $\boxed{6}$ Ako je proces započet u trenutku kada je prvi sud bio prazan, u kom je stanju najveća verovatnoća da će se naći proces nakon 2 koraka? A nakon 4? A nakon 6? Da li možemo izvući neki generalni zaključak o stanju u kom će se naći sistem nakon dužeg vremena?

Rešenja na TMF-u u Beogradu redovni rok 2022/2023.

A grupa

1. a)

Y/X	0	1
0	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$
1	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$
2	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$

b) $E(X) = \frac{6}{13}$ i $E(Y^2) = \frac{21}{13}$.

c) $X_{Y \geq 1} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

$E(X|Y \geq 1) = \frac{4}{9}$

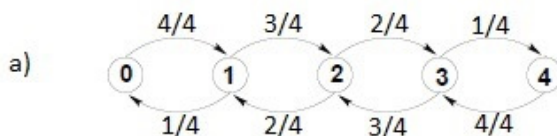
d) $E(X + Y) = \frac{19}{13}$

e) $XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$.

$E(XY) = 6/13$. Kada su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada važi $E(XY) = E(X)E(Y)$

- $P(X \leq 4) = 0.4562$
 - $P(|X| \leq 1) = \Phi(0.67) - \Phi(0.44) = 0.0786$
 - $P(X^2 - 3X \leq -2) = P(1 \leq X \leq 2) = 0.0407$
 - $x = 26.78$
 - $x = -7.96$.

- a)



b) $p = 1/4$

c) Nakon 2, 4 ili 6 koraka najveća je verovatnoća da se nađe u stanju 2. Nakon velikog (parnog) broja koraka ovaj sistem dolazi u ravnotežno stanje sudova, što je u ovom slučaju po 2 molekula u svakom.