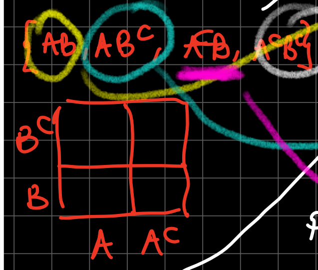
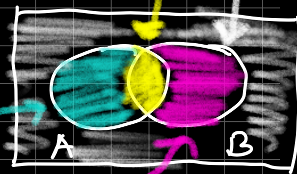
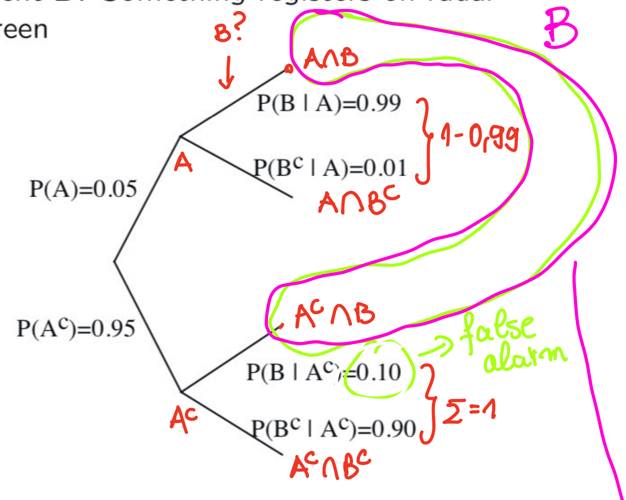
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$





Models based on conditional probabilities

- Event A: Airplane is flying above
  Event B: Something registers on radar screen



$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = 0{,}05\cdot 0{,}99 = 0{,}0495$

$P(B) = P(AB) + P(A^cB) = P(A)P(B|A) + P(A^c)\cdot P(B|A^c)$

$= 0.05\cdot 0{,}99 + 0{,}95\cdot 0{,}10 = 0{,}1445$

$P(A\mid B) =$

$P(A\cap B)$

$\parallel$

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$\Rightarrow P(B\cap A) = P(A)\cdot P(B|A)$

→ Множи вероватноће дуж грана

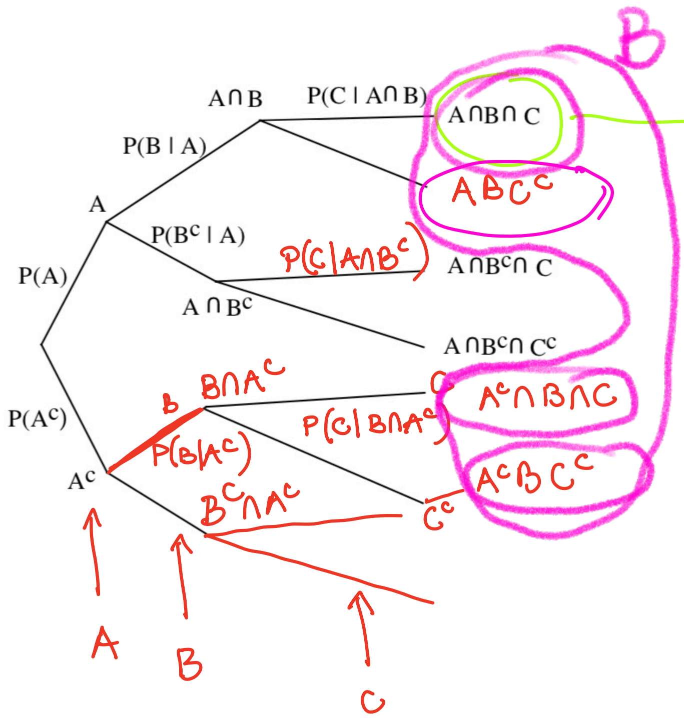
$B = AB \cup A^cB$

$P(B) = P(AB) + P(A^cB)$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}0495}{0{,}1445} = 0{,}34$$

Multiplication rule

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)$$



$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$

↓

Множимо вероватноће дуж грана

$P(A\cap B\cap C) = P(A\cap B)\cdot P(C|A\cap B)$

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$

ПРАВИЛО ПРОИЗВОДА

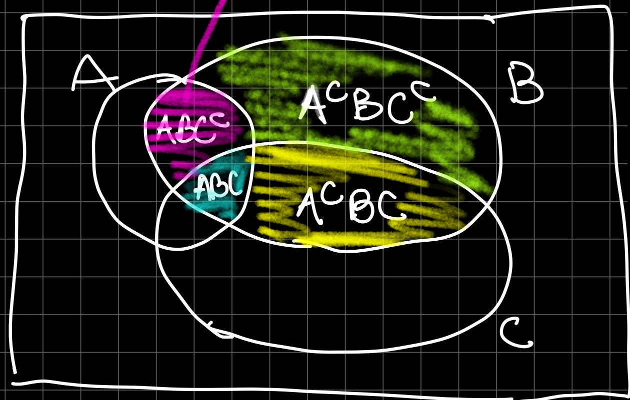
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A\cap B\cap C) = \underbrace{P(A\cap B)}\cdot P(C\mid A\cap B) = P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid A\cap B)$$

правило производа

$P(B) = ?$

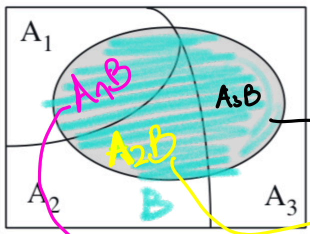
$$P(B) = P(ABC) + P(ABC^c) + P(A^cBC) + P(A^cBC^c)$$



Total probability theorem

- Divide and conquer
- Partition of sample space into A_1, A_2, A_3
- Have $\mathbf{P}(B \mid A_i)$, for every i

хипотезе



- One way of computing $\mathbf{P}(B)$:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B\mid A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B\mid A_2) + \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B\mid A_3)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ хипотезе:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)$$

ФОРМУЛА ТОТАЛНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

- Простор исхода делимо на ХИПОТЕЗЕ (A_1, A_2, A_3)
- Хипотезе МОРАЈУ бити дисјунктне
- Њихова унија чини E

БАЈЕСОВО ПРАВИЛО

A = "авион је на небу" ← хипотеза

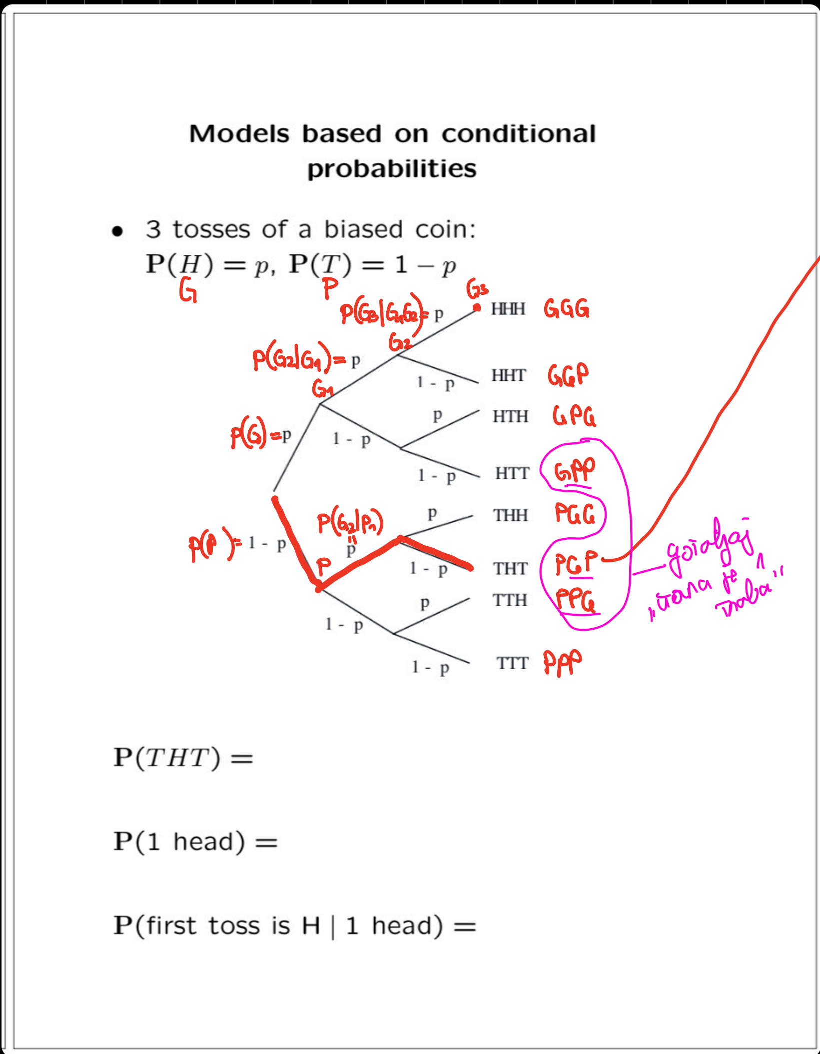
$P(A)$ – АПРИОРИ, вер. пре извођења експеримента

$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}$$

$P(A\mid B)$ АПОСТЕРИОРИ, вероватноћа хипотезе после обављеног експеримента

$$P(A_i\mid B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}{\sum_j P(A_j)\cdot P(B\mid A_j)}$$

НЕЗАВИСНОСТ



Models based on conditional probabilities

- 3 tosses of a biased coin: $\mathbf{P}(H) = p$, $\mathbf{P}(T) = 1 - p$

$\mathbf{P}(THT) =$

$\mathbf{P}(1 \text{ head}) =$

$\mathbf{P}(\text{first toss is H} \mid 1 \text{ head}) =$

<u>пример:</u>

1° $p(PGP) = (1-p) \cdot p \cdot (1-p)$

2° $P(1 \text{ глава}) = p(GPP) + p(PGP) + p(PPG)$
$= p(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p) + (1-p)(1-p)p$
$= 3 \cdot p(1-p)^2$

3° $P(\text{прво бацање је } G \mid 1 \text{ глава}) = ?$

Интуиција: у ова 3 само у 1 је пала G на првом месту $\Rightarrow p = \frac{1}{3}$

$$P = \frac{P(\text{прва је } G, \text{ пала само 1 глава})}{P(1 \text{ глава})} = \frac{P(GPP)}{3p(1-p)^2} = \frac{p(1-p)^2}{3p(1-p)^2} = \frac{1}{3}$$

слично важи: $P(A|B) = P(A)$

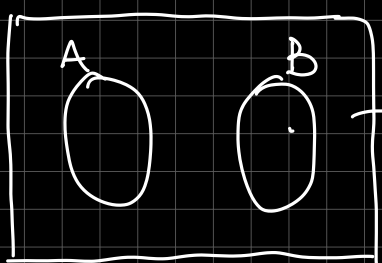
ДЕФ: $P(B|A) = \underline{P(B)}$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

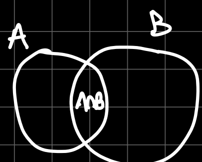
$P(A \cap B) = P(A) \cdot \underline{P(B|A)}$

САМО АКО СУ НЕЗАВИСНИ A и B!

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



зависни!



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

The king's sibling

- The king comes from a family of two children. What is the probability that his sibling is female?

ББ $\frac{1}{4}$	СБ $\frac{1}{4}$
БС $\frac{1}{4}$	СС $\frac{1}{4}$

Условни модел $P = 3\cdot\frac{1}{4}$

B = "роди се крал"

$p(B) = 3\cdot\frac{1}{4}$

A = "крал има сестра"

$$p(A) = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ

пример. Број подскупова скупа $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$1 \quad \underbrace{2} \quad 3 \quad \underbrace{4} \quad 5 \quad \ldots\ldots \quad \underbrace{n}$$

$$\{2, 4, n\}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$$

теор: k-комбинација n-чланог скупа једнак је

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

број k-чланих подскупова скупа од n ел.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

пример: n независних бацања новчића

$$P(G) = p$$

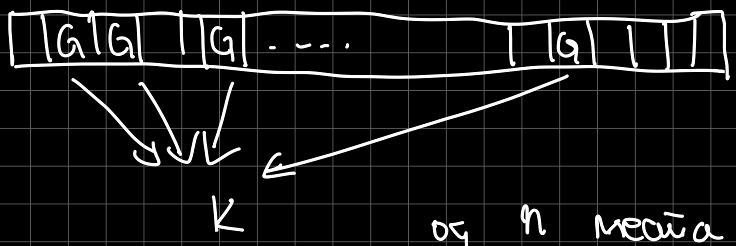
$$P(GPPGGG) = P(G) \cdot P(P) \cdot P(P) \cdot P(G) \cdot P(G) \cdot P(G) =$$
$$= p \cdot (1-p)(1-p) \cdot p \cdot p \cdot p = p^4 (1-p)^2$$

$$P(\text{секвенце}) = p^{\#\text{глава}} (1-p)^{\#\text{писма у секвенци}}$$

$$P(k \text{ глава}) = p^k (1-p)^{n-k} \cdot \underbrace{(\text{број секвенци које имају } k \text{ глава})}_{?}$$

$\sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \sqcup$ од 6 места бирано 4 $\rightarrow \binom{6}{4}$

тј. $\binom{n}{k}$



← n места тј. бацања

од n места треба изабрати k која имају G $\Rightarrow \binom{n}{k}$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

Колико је

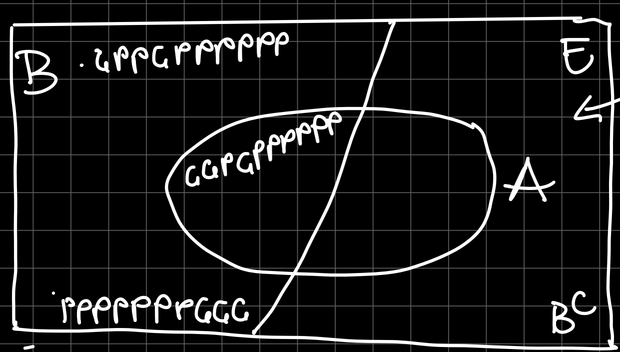
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

Пример: Бацамо новчић 10x. $P(G)=p$

B = "3 од 10 бацања су G"

Пт. да се B догодило, колика је (условна) вероватноћа да је у прва 2 бацања добијена G?

A



← у E нису све секвенце са истим p

Али у B: све секвенце имају

$$p = p^3(1-p)^7$$

кардиналност скупа

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|}{|B|} = (*)$$

пошто су све једнако вероватне

- Колико елемената има скуп B? $\binom{10}{3}$

- Колико елемената има скуп $A \cap B$?

$\underline{G}\ \underline{G}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$

На њих 8 места распоређујемо 1 главу

8 начина

$$= \frac{8}{\binom{10}{3}} \left(= \frac{8 \cdot \cancel{p^3 (1-p)^7}}{\binom{10}{3} \cdot \cancel{p^3 (1-p)^7}} \right)$$

Пример: шпила од 52 карте се дели четворици играча. Наћи P да сваки од играча добије кеца:

Број свих могућих:

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$$

Делимо 4 кеца четворици играча $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 4!$

преостале карте делимо на

$$\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$$

$$P = \frac{4! \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}$$