7.11.2023.

MATEMATIKA.TMF.BG.AC.RS

UZEKOVIC@TMF.BG.AC.RS

ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ, ОСОБИНЕ

СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈИ

11.03.

p_n – вероватноћа да у групи од n људи 2 особе имају исти рођендан

$p_1 = 0$

$$p_2 = \frac{1}{365} = \frac{365}{365 \cdot 365} = \frac{1}{365}$$

$p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$

$$p_n = \frac{365^n - \underbrace{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)}_{n\text{-особа бира различите датуме рођења}}}{365^n}$$

$> \frac{1}{2}$

$p_{22} < \frac{1}{2} < p_{23}$

$=$ већ за $n=23$: $p_{23} > 1/2$

ЕКСПЕРИМЕНТ СЕ САСТОЈИ ОД: испуњења неких услова и праћења резултата.

пример: Бацање 2 новчића истовремено.

ПРАТИМО (РЕГИСТРОВАТИ) да ли је пала глава или писмо
Г П

ИСХОД (основни појам) – елементарни догађај → не може се раставити на простије исходе

могући исходи: ГГ, ГП, ПГ, ПП

$e_1, e_2, e \dots$

$e_1 = ПГ$

Скуп свих ел. исхода Ω $E = \{ГГ, ГП, ПГ, ПП\}$

догађај „новчићи су пали на исту страну"

$E = \{0, 1, 2\}$

пратимо "колико пута је пало писмо"

СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈ је сваки подскуп скупа E.

пр. 2 Новчић се баца до прве појаве писма: „пало је барем једно писмо“

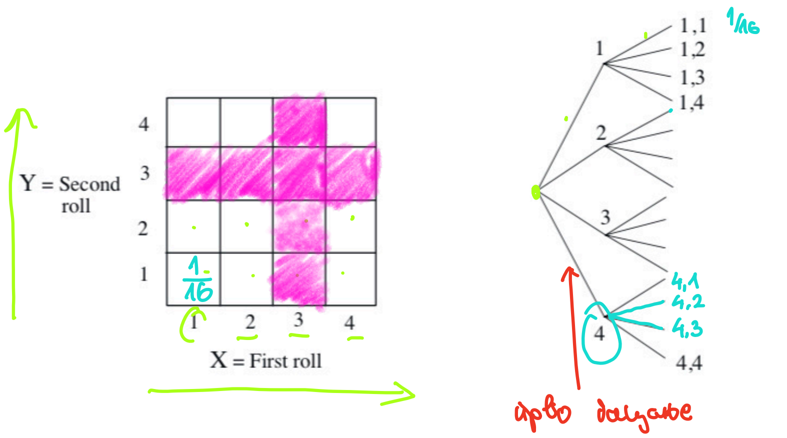
$$E = \{ П, ГП, ГГП, ГГГП, \dots \}$$ ← скуп свих могућих исхода је бесконачан

пр. 3 Бацамо тетраедарну коцкицу 2X.

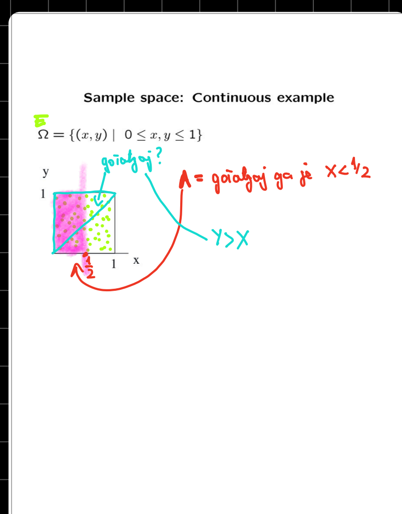
$$E = \{ 11, 12, 13, \dots \}$$

Sample space: Discrete example

- Two rolls of a tetrahedral die
  - Sample space vs. sequential description



догађај A = "барем једном је пала 3"



Догађај A се реализовао ако..

СИГУРАН ДОГАЂАЈ је онај који се увек остварује, тј. A = E

НЕМОГУЋ ДОГАЂАЈ $A = \emptyset$

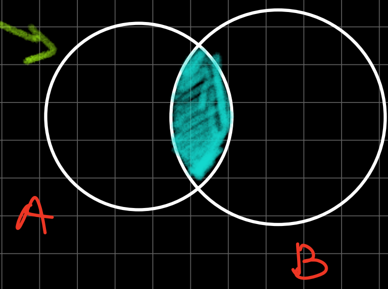
3деф: СУПРОТАН ДОГ. S

2деф: УНИЈА ДОГ. $A\cup B$ је C акко се реал. БАР ЈЕДАН од A и B

$$C = A\cup B$$

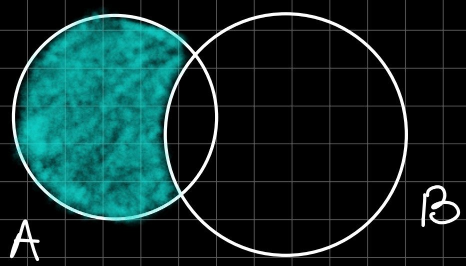
2деф: ПРЕСЕК ДОГ. ... и A и B

A се остварио $\quad D = A\cap B \quad (D = AB)$

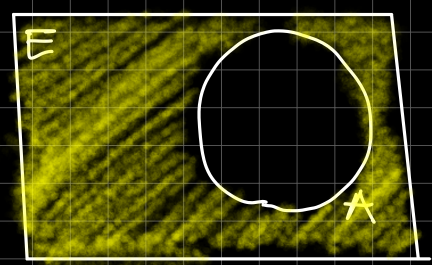


$A\setminus B$ — B није

A разлика B



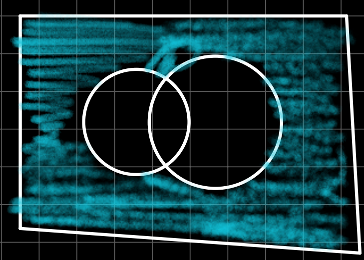
$S = A^c, \; S = \bar{A}$

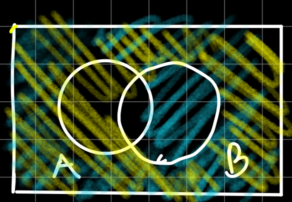


ДЕ-МОРГАНОВА ПРАВИЛА:

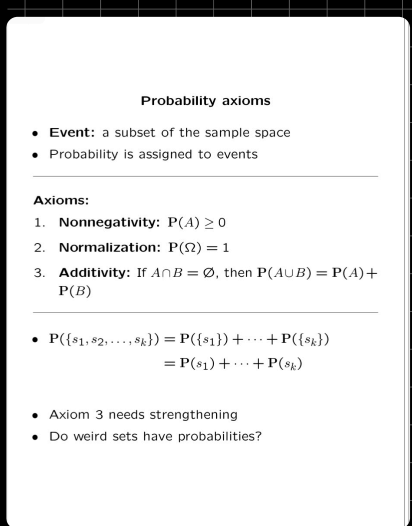
$$\overline{A\cup B} \neq \bar{A}\cup\bar{B}$$
$$= \bar{A}\cap\bar{B}$$

$\overline{A\cup B}$





$$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$



ВЕРОВАТНОЋА

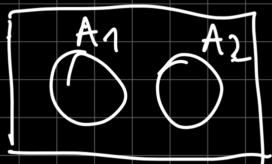
ДЕФ: E. P деф. на подскуповима E назива се ВЕРОВАТНОЋА ако:

a1) НЕНЕГАТИВНОСТ $\quad P(A) \geq 0, \; \forall A\subset E$

a2) НОРМИРАНОСТ: $\quad P(E) = 1 \quad (P(A)\leq 1)$

a3) АДИТИВНОСТ: $\quad A_1, A_2 \subset E, \; A_1A_2 = \emptyset$

$$P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

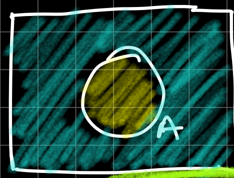


Важи теорема:

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

a2) $0 \leq P(A) \leq 1$



ПОСЛЕДИЦЕ: $A \cup \bar{A} = E$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(E)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \overset{a3}{\Longrightarrow} P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

Discrete uniform law

- Let all outcomes be equally likely
- Then,

$$P(A) = \frac{\text{number of elements of } A}{\text{total number of sample points}}$$

- Computing probabilities $\equiv$ counting
- Defines fair coins, fair dice, well-shuffled card decks

ДЕФ: $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ скуп од n-исхода, A случајни догађај састоји се од k исхода са подједнаким шансама $P(A)$ зовемо ВЕРОВ. ДОГАЂАЈА A и деф:

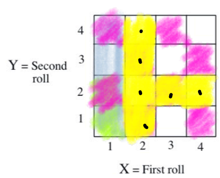
$$P(A) = \frac{\text{број повољних исхода}}{\text{број свих могућих исхода}} = \frac{k}{n}$$

РЕЛАТИВНА ФРЕКВЕНЦИЈА ДОГАЂАЈА A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{k}{n}$$

← статистичко одређ. вероватноће

Probability law: Example with finite sample space



- Let every possible outcome have probability 1/16
  - $P((X,Y) \text{ is } (1,1) \text{ or } (1,2)) =$ $\cancel{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}}$ $= \frac{2}{16}$
  - $P(\{X = 1\}) =$ $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
  - $P(X + Y \text{ is odd}) =$ $\frac{8}{16}$
  - $P(\min(X,Y) = 2) =$ $\frac{6}{16}$

$p(1) = \frac{1}{4}$

$p(2) = \frac{1}{4}$

$p(3) = \frac{1}{4}$

$p(4) = \frac{1}{4}$

ОСОБИНЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

1° $P(E) = 1$

2° $P(\emptyset) = 0$

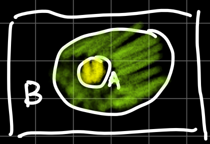
3° $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

5° $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

6° $0 \leq P(A) \leq 1$

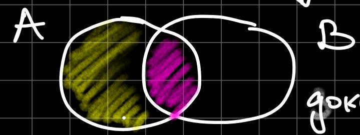
7° $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$



$B = (B \setminus A) \cup A$ $\xRightarrow{\text{аз)}}$ ....

непр. пресек

Доказ за домаћи



доказ: $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$

аз) $\Rightarrow$ ...

<u>пример:</u> Имамо 12 куглица: 4Ц, 3Б, 5С

A = "извлачење црне куглице"

B = " .... беле .... "

C = " .... сиве .... "

а) Која је вероватноћа да извучемо црну?

$A = \{Ц1, Ц2, Ц3, Ц4\}$

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{|A|}{|E|}$$

б) Вероватноћа да НЕ извучемо црну?

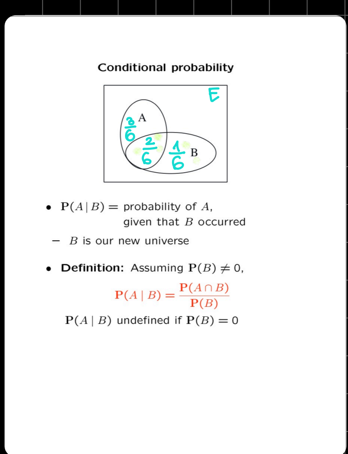
$\bar{A} = B \cup C$

$$P(\bar{A}) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$$

јер $B \cap C = \emptyset$

II начин: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

УСЛОВНА ВЕРОВАТНОЋА



$p(A) = \frac{5}{6}$

Догодило се B!

$p(A|B)$

$p(B|B) = 1$

$P(A|B) = \frac{2}{3}$

ДЕФИНИЦИЈА: уз. $p(B) \neq 0$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Не може да се дели са 0?

$p(B) = 0 \Rightarrow p(A|B)$ недефинисано...

ПРАВИЛО ПРОИЗВОДА:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

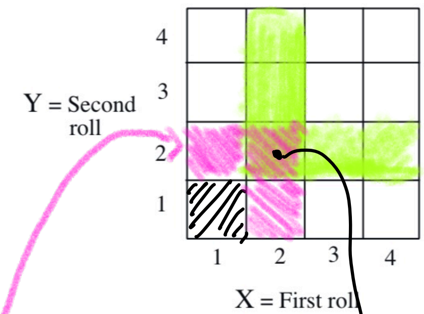
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$$

Die roll example



- Let B be the event: $\min(X, Y) = 2$
- Let $M = \max(X, Y)$ → ово је спој. а не догађај!
- $\mathbf{P}(M = 1 \mid B) = 0$
- $\mathbf{P}(M = 2 \mid B) = \frac{1}{5}$

$$P(M=2 \mid B) = \frac{P(M=2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{5 \cdot \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{1}{5}$$