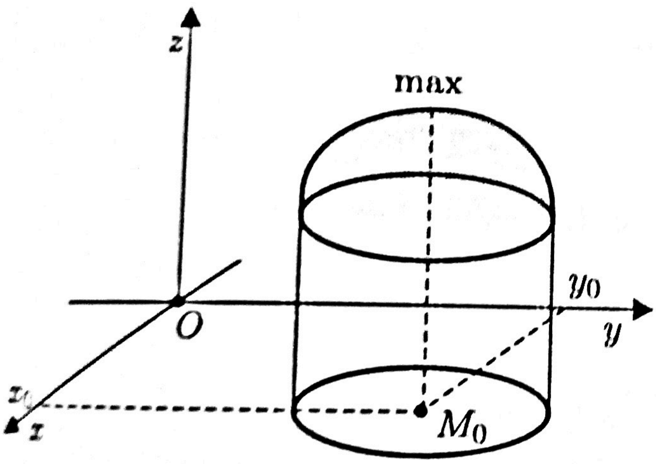
$\ldots y) = e^{x+y}$ glasi:

$$e^{x+y} = 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \ldots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}(x+y)^2 + \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x+y)} \quad (0 < \theta < 1).$$

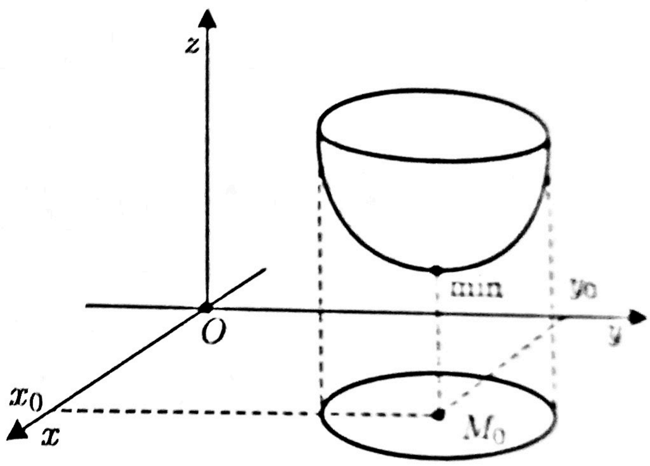
1.10 Ekstremne vrednosti funkcija dve promenljive

Definicija 24. Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na skupu $D \subset R^2$.

Tačka $M_0(x_0, y_0) \in D$ je *tačka lokalnog maksimuma*, a vrednost $f(x_0, y_0)$ *lokalni maksimum* funkcije $z = f(x, y)$ ako postoji okolina $\mathcal{O}(M_0)$ tačke M_0 tako da za svaku tačku $M(x, y) \in \mathcal{O}(M_0) \cap D$ i $M \neq M_0$ važi $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (sl. 6).



Sl. 6



Sl. 7

Tačka $M_0(x_0, y_0) \in D$ je *tačka lokalnog minimuma*, a vrednost $f(x_0, y_0)$ *lokalni minimum* funkcije $z = f(x, y)$ ako postoji okolina $\mathcal{O}(M_0)$ tačke M_0 tako da za svaku tačku $M(x, y) \in \mathcal{O}(M_0) \cap D$ i $M \neq M_0$ važi $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (sl. 7).

Lokalni maksimum i minimum zovu se *lokalni ekstremumi*.

Napomenimo da su ovde definisani *strogi* lokalni ekstremumi funkcije $z = f(x, y)$. Ako bi u datim nejednakostima umesto $<$ ($>$) stajalo $\leq$ ($\geq$), reč bi bila o *ne strogim ekstremumima*.

Definicija 25. Tačka $M_0(x_0, y_0) \in D$ je *stacionarna tačka* funkcije $z = f(x, y)$ ako je

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Tvrđenje 11. Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana u nekoj okolini unutrašnje tačke $M_0(x_0, y_0) \in D$ i neka ima parcijalne izvode prvog reda u toj tački.

Ako je $M_0(x_0, y_0)$ tačka lokalnog ekstremuma funkcije $z = f(x, y)$, tada je $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije, tj.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija u tački $M_0(x_0, y_0)$ postiže maksimum. To znači da postoji okolina tačke M_0 tako da za svaku tačku $M(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$ iz te okoline važi

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Specijalno je

$$f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0) < 0 \quad \text{i} \quad f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Sledi da je

$$\frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} < 0 \quad \text{za} \quad \triangle x > 0 \tag{50}$$

i

$$\frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} > 0 \quad \text{za} \quad \triangle x < 0 \tag{51'}$$

i isto tako

$$\frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y} < 0 \quad \text{za} \quad \triangle y > 0 \tag{51}$$

i

$$\frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y} > 0 \quad \text{za} \quad \triangle y < 0. \tag{52'}$$

Pošto po pretpostavci postoje parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ u tački $M_0(x_0, y_0)$, iz (51) i (51') sledi

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = 0,$$

a iz (52) i (52'):

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y} = 0,$$

tj.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Dokaz je analogan i u slučaju kad funkcija u tački $M_0(x_0, y_0)$ postiže minimum.

Obrnuto tvrđenje ne mora da važi, tj. stacionarna tačka ne mora biti tačka ekstremuma funkcije. Stacionarna tačka koja nije tačka ekstremuma naziva se ***sedlasta tačka.***

Primer 23. Tačka $(0, 0)$ je stacionarna tačka funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$, međutim nije tačka ekstremuma. Naime, u proizvoljnoj okolini tačke $(0, 0)$ u kojoj je $f(0, 0) = 0$ funkcija postiže i pozitivne i negativne vrednosti. Na primer, u tačkama oblika $(\delta, 0)$ je $f(\delta, 0) = \delta^2 > 0$, dok je u tačkama oblika $(0, \delta)$ $f(0, \delta) = -\delta^2 < 0$ $(\delta \neq 0)$. Dakle, tačka $(0, 0)$ je sedlasta tačka date funkcije.

Ovo znači da je uslov $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ potreban (neophodan), ali ne i dovoljan za egzistenciju ekstremuma funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$.

Sledeće tvrđenje daje dovoljan uslov za egzistenciju ekstremuma funkcije dve promenljive.

Tvrđenje 12. Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode u nekoj okolini tačke $M_0(x_0, y_0)$.

Ako je $M_0(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije, tj.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

i ako je

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = t, \quad \triangle = rt - s^2,$$

tada važe zaključci:

1° Ako je $\Delta > 0$ i $r > 0$, M_0 je tačka lokalnog minimuma;

2° Ako je $\Delta > 0$ i $r < 0$, M_0 je tačka lokalnog maksimuma;

3° Ako je $\Delta < 0$, M_0 nije tačka lokalnog ekstremuma, tj. M_0 je sedlasta tačka;

4° Ako je $\Delta = 0$, ne može se utvrditi priroda tačke M_0.

Dokaz. Kako funkcija $z = f(x,y)$ ima neprekidne parcijalne izvode u nekoj okolini tačke $M_0(x_0,y_0)$, za tačku $M(x,y)$ iz te okoline važi Tejlorova formula

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left((x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right) +$$

$$\frac{1}{2!}\left((x-x_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right) +$$

$$+R_2(x,y).$$

Ako stavimo $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ i uzmemo u obzir pretpostavke u tvrđenju, dobijamo da je

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{1}{2!}(r\Delta x^2 + 2s\Delta x\Delta y + t\Delta y^2) + R_2(\Delta\rho),$$

odnosno za $\Delta y \neq 0$:

$$\Delta z = \frac{\Delta y^2}{2!}\left(r\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2s\frac{\Delta x}{\Delta y} + t\right) + R_2(\Delta\rho).$$

Kako je $R_2(\Delta\rho)$ beskonačno mala višeg reda u odnosu na beskonačno malu $\Delta x^2 + \Delta y^2$ kad $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$, sledi da za male $|\Delta x|$ i $|\Delta y|$ $R_2(\Delta\rho)$ ne utiče na znak razlike Δz.

Kako je $\Delta y^2 > 0$, znak od Δz zavisi samo od znaka izraza $ru^2 + 2su + t$, gde je $u = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, $\Delta y \neq 0$. Pošto je ovaj izraz kvadratni trinom, zaključujemo da važi:

1° Ako je $r > 0$ i $\Delta = rt - s^2 > 0$, tada je $ru^2 + 2su + t > 0$ za svako u, tj. svako Δx i $\Delta y \neq 0$, pa funkcija u tački $M_0(x_0,y_0)$ postiže minimum;

2° Ako je $r < 0$ i $\Delta = rt - s^2 > 0$, tada je $ru^2 + 2su + t < 0$ za svako u, tj. svako Δx i $\Delta y \neq 0$, pa funkcija u tački $M_0(x_0,y_0)$ postiže maksimum;

3° Ako je $\Delta = rt - s^2 < 0$, tada izraz $ru^2 + 2su + t$ menja znak u zavisnosti od u, tj. od Δx i $\Delta y \neq 0$, pa u tački $M_0(x_0,y_0)$ funkcija ne postiže ekstremum;

4° Ako je $\Delta = rt - s^2 = 0$, tada je $\Delta z = \dfrac{\Delta u^2}{2!} r \left(u + \dfrac{s}{r}\right)^2 + R_2(\Delta\rho)$, pa vidimo da za $u = -\dfrac{s}{r}$ je $\Delta z = R_2(\Delta\rho)$, što znači da se na ovaj način ne može utvrditi znak razlike Δz, već su potrebna dopunska ispitivanja pomoću diferencijala višeg reda u Tejlorovoj formuli ili na neki drugi način.

Primer 24. Naći ekstremne vrednosti funkcije:

$$z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6.$$

Parcijalni izvidi prvog reda funkcije su $z'_x = 2x + 2$ i $z'_y = 2y - 4$, pa je tačka $M_0(-1, 2)$ stacionarna tačka funkcije.

Kako je $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = 2$, tj. $r = 2$, $s = 0$, $t = 2$ i $\Delta = rt - s^2 = 4$, sledi da funkcija u tački $M_0(-1, 2)$ postiže minimum koji iznosi $z_{min} = f(-1, 2) = 1$.

1.11 Uslovni ekstremumi