2.4. ОПШТИ ОБЛИК ПРОБЛЕМА ЛП И ЊЕГОВА СВОЈСТВА

2. 4.1. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ОПШТЕГ ЗАДАТКА ЛП

Општи задатак ЛП може се исказати у формализованом развијеном облику као

$$\text{или} \begin{Bmatrix} \text{максимизирати} \\ \text{минимизирати} \end{Bmatrix} f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{2.11}$$

при ограничењима (п.о.)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\overset{<}{\underset{>}{=}} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\overset{<}{\underset{>}{=}} b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\overset{<}{\underset{>}{=}} b_m \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \tag{2.13}$$

или сажетије као

$$\text{или} \begin{matrix} (\max) \\ (\min) \end{matrix} f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overset{<}{\underset{>}{=}} b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где су a_{ij}, c_i, b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, задати реални бројеви, а знак $\overset{<}{\underset{>}{=}}$ означава да се на његовом месту може налазити једна од следећих ознака: $\leq$, $=$, $\geq$. Другим речима, треба у допустивој области скупа линеарних ограничења (2.12)-(2.13) наћи ону тачку у којој линеарна функција $f(x)$ постиже екстремну (тј. највећу или најмању) вредност.

Функција $f(x)$ се назива *функцијом циља* (или *критеријумском функцијом*), док се m ограничења из скупа (2.12) назива, једноставно, *ограничењима* проблема ЛП, а услови ненегативности (2.13) *природним ограничењима* овог проблема. (Ови услови представљају природне захтеве у већини реалних проблема и не разликују се, са аспекта геометрије допустиве области скупа (2.12)-(2.13), од осталих ограничења, али се другачије третирају при решавању задатка ЛП.) Допустива област скупа (2.12)-(2.13) зове се *допустива област* проблема ЛП, а свака тачка допустиве области представља *допустиво решење* овог проблема. Оно допустиво решење у коме функција циља $f(x)$ постиже свој екстремум назива се *оптималним решењем* проблема. Матрица $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ се често назива *матрицом ограничења*, а b_i, $i=1,2,\dots,m$, *слободним чланом* i-тог ограничења из (2.12).

Ако су сва ограничења у (2.12) истог типа и $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$, $b=(b_1,b_2,\dots,b_m)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, тада се проблем ЛП може приказати и у матрично-векторској форми. Тако се, у случају када су сва ограничења типа једначина, проблем (2.11)-(2.13) своди на тзв. *стандардни облик* задатка ЛП који има матрично-векторску форму

$$\begin{aligned}&\text{(max) или (min) } c^T x\\ &\text{п.о.}\\ &Ax=b\\ &x\ge 0\end{aligned}$$

Ако су сва ограничења у (2.12) неједначине истог типа ($\le$ или $\ge$), тада се следећи облици

$$\begin{aligned}&\text{(max) } c^T x\\ &\text{п.о.}\\ &Ax\le b\\ &x\ge 0\end{aligned}\qquad \text{и} \qquad \begin{aligned}&\text{(min) } c^T x\\ &\text{п.о.}\\ &Ax\ge b\\ &x\ge 0\end{aligned}$$

називају *симетричним облицима* задатка ЛП..

Лако се показује да се проблем ЛП задат у општем облику може увек свести на стандардни или симетрични облик (видети 2.5.1 и 2.7.1).Стандардни облик је посебно важан при алгебарској реализацији неких метода за решавање ЛП, па је зато изучавању његових својстава посвећено читаво Поглавље 2.5.

(Напоменимо да се величине c, b и x у претходним матрично-векторским формулацијама проблема ЛП сматрају векторима-колонама, тј. матрицама са једном колоном. Тако, на пример, за n-торку $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ се у овим формулацијама подразумева да је матрица типа $n\times 1$ облика $c=[c_1 c_2 \dots c_n]^T$. Оваква конвенција важи и за све векторе који се појављују у осталим матричним формулама ове главе. При томе, $x\ge 0$ означава да су све координате вектора x ненегативне, $x=0$ да су све ове координате једнаке 0, а $x\le y$ да свака координата вектора x није већа од одговарајуће координате вектора y.)

2.4.3. СВОЈСТВА ОПШТЕГ ЗАДАТКА ЛП

Сада ћемо размотрити неке врло битне особине општег задатка ЛП (2.11)-(2.13) произвољне димензије n (које представљају уопштења Својстава 2.1 –2.4 из Поглавља 2.3) и продискутовати њихову важност за процес решавања овог проблема. При томе ћемо користити уопштене појмове конвексног полиедра у R^n и његових темена, ивица и страна дефинисане у 2.4.2.

Својство 2.5. Коначан број темена. Ако је допустива област D проблема (2.11) – (2.13) непразан скуп, тада D представља n-димензионални конвексни полиедар, при чему

(а) постоји бар једно теме области D, и

(б) број темена области D је коначан. ♦

Пошто свако теме из D представља јединствено решење једног система од n између $m+n$ једначина, тада је горња граница укупног броја темена једнака у општем случају броју комбинација без понављања n-те класе од $m+n$ елемената, тј

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+1)!}{m!n!}. \tag{2.17}$$

Својство 2.6. Егзистенција оптималних темена. Ако проблем (2.11) – (2.13) има оптимална решења, тада сва она припадају граници ∂D области D. Прецизније,

(а) ако је оптимално решење проблема јединствено, тада оно представља теме области D;

(б) ако проблем има више оптималних решења, тада сва она чине неку страну области D која садржи бар једно теме ове области. ◆

Подсетимо да, према Ставу 2.3 из 2.4.2, свако теме области D представља екстремну тачку ове области (тј. не постоји дуж у D која садржи теме као своју унутрашњу тачку). Значи да се, према Својству 2.6, екстремум функције циља $f(x)$ постиже у екстремним тачкама области D.

Својство 2.7. Критеријум оптималности темена. Ако проблем (2.11) – (2.13) има оптимално решење и теме x_0 из D испуњава услов да не постоји њему суседно теме у коме је вредност функције циља "боља" од $f(x_0)$, тада x_0 представља једно оптимално решење овог проблема. ◆

(Термин "боља" овде значи да је у случају максимизације функције циља вредност ове функције већа, а у случају минимизације мања од $f(x_0)$).

Својство 2.8. Егзистенција оптималног решења.

(а) Ако је област D непразна и ограничена, тада проблем (2.11) – (2.13) увек има оптимално решење;

(б) Ако је област D непразна и неограничена, тада проблем (2.11) – (2.13) у коме се врши максимизација (минимизација) функције циља има оптимално решење онда и само онда ако је ова функција ограничена одозго (одоздо). ◆

Својства 2.5 и 2.6 могу у многоме да упросте процес тражења оптималних решења проблема (2.11)-(2.13), јер се на основу њих, ова решења могу тражити, не на читавом скупу D, него на суженом скупу свих темена од D којих има коначно много. Тако се проблем ЛП може свести на проблем тзв. *комбинаторне оптимизације* (код које се тражи екстремум функције на скупу коначно много елемената). Теоријски гледано, проблем ЛП би се могао решити експлицитним налажењем свих темена и упоређивањем вредности функције у њима. Међутим, у пракси би овакав поступак био крајње неефикасан, јер би број испитивања постојања темена био једнак броју (2.17), а овај број, иако коначан, може бити изузетно велик (На пример, за врло мали проблем ЛП код кога је $m = n = 50$, требало би испитати да ли постоје решења $100!/(50!)^2 \approx 10^{29}$ система од 50 једначина са 50 непознатих!) Зато