њену р...

Код ЛП је од посебне важности разматрање до... скупа линеарних ограничења, тј. скупа (2.2) у коме су све функције $f_i(x)$ линеарне. Прецизна дефиниција овакве области, као и њена геометријска својства, биће описани у Поглављима 2.3 и 2.4.

2.3. Геометријска интерпретација проблема ЛП

Да би се лакше разумели основни концепти ЛП изложени у наредним поглављима, овде ће на неколико конкретних примера бити илустрована геометријска интерпретација проблема ЛП у најједноставнијем – дводимензионалном случају, као и графички начин решавања овог проблема. На основу тога биће уочена нека општа својства његових оптималних решења која настављају да важе и за проблеме ЛП већих димензија.

Пример 2.3. Графичко налажење решења. Посматрајмо овде Пример 2.1 из Поглавља 2.1. који је моделиран као следећи дводимензионални проблем ЛП:

$$\text{максимизирати } F = 5x_1 + 2x_2 \tag{2.6}$$

при ограничењима (п.о.)

$$x_1 \le 6 \tag{2.7}$$

$$2x_2 \le 18 \tag{2.8}$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 24 \tag{2.9}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{2.10}$$

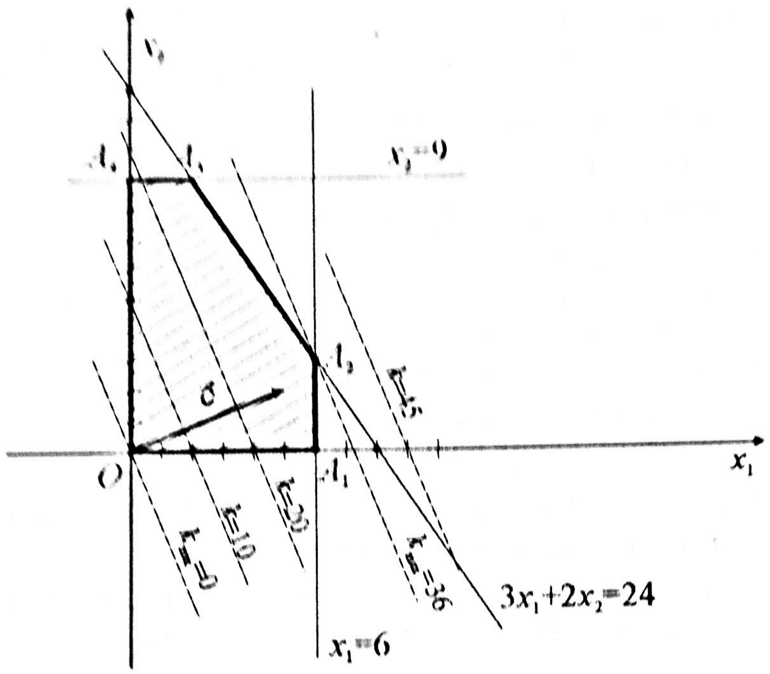
У складу са уобичајеном терминологијом ЛП, функција F се назива *функцијом циља* (или *критеријумском функцијом*), док се свака допустива тачка скупа ограничења (2.7)-(2.10), тј. свака тачка из допустиве области овог скупа, назива *допустивим решењем проблема*. Ограничења (2.10) називају се *природним ограничењима* (јер овде представљају природан захтев да количине производа не буду негативне). Сада се проблем (2.6)-(2.10) своди на налажење оног допустивог решења проблема у коме функција циља F постиже највећу вредност. Ово решење се зове *оптимално решење* проблема. (У Поглављу 2.4 ће претходно уведени термини бити дефинисани и у случају проблема ЛП у општем облику).

Допустива област D скупа ограничења (2.7)-(2.10) приказана је на Слици 2.4. Пошто су ова ограничења линеарна, тада је D конвексни полигон у равни чија су темена $O=(0,0)$, $A_1=(6,0)$, $A_2=(6,3)$, $A_3=(2,9)$ и $A_4=(0,9)$.

Уочимо фамилију једначина

$$5x_1 + 2x_2 = k,$$

где је k било какав реалан параметар. Свака једначина из ове фамилије одређује праву у равни, такву да у свим тачкама ове праве (и само у њима) функција циља F има вредност k. Оваква права назива се *правом функције циља* F која одговара њеној вредности k.



Сл. 2.4. Графичко решавање проблема ЛП

Различитим вредностима k одговарају различите праве функције циља које су све међусобно паралелне и нормалне на вектор $\vec{c} = (5,2)$ (На Слици 2.4 приказане су такве праве за $k = 0,10,20,36,45$). Познато је да је вредност $\vec{c}$ градијент функције циља F и да, због тога, представља правац најбржег раста ове функције. Зато ће очигледно вредност k расти ако се одговарајуће праве функције циља удаљавају од координатног почетка у смеру вектора $\vec{c}$ (видети Слику 2.4).

Сада се налажење оптималних решења проблема (2.6)-(2.10) може свести на одређивање највеће вредности параметра k (у ознаци $k_{\max}$) за коју важи да одговарајућа права функције циља F има заједничких тачака са допустивом области D. Права $5x_1 + 2x_2 = k_{\max}$ назива се *горња потпорна права* области D и заједничке тачке ове праве и D представљају оптимална решења проблема (2.6)-(2.10).

Напоменимо да најмања вредност параметра k (у ознаци $k_{\min}$) за коју одговарајућа права функције циља F има заједничких тачака са D, одређује *доњу потпорну праву* $5x_1 + 2x_2 = k_{min}$ области D. Заједничке тачке ове праве и D представљале би оптимална решења проблема у коме би се функција F минимизирала на D.

Сада се горња потпорна права области D може једноставно графички одредити на следећи начин: Треба конструисати неку од правих функције циља (нпр. $5x_1 + 2x_2 = 0$ која пролази кроз координатни почетак), па је затим паралелно померати у смеру вектора $\vec{c} = (5,2)$, што је могуће даље од координатног почетка, све док се не одреди "крајњи положај" ове праве у коме она још увек има заједничких тачака са D, а цело D се налази само са једне стране праве. Овакав положај очигледно дефинише горњу потпорну праву од D.

На овај начин се одређује горња потпорна права $5x_1 + 2x_2 = k_{max} = 36$ која има само једну заједничку тачку A_2 са области D. Зато теме $A_2 = (6,3)$ представља јединствено оптимално решење проблема (2.6)-(2.10), а максимална вредност функције циља F је једнака 36. Исказано терминима реалног проблема из Примера 2.1, то значи да, ако фирма у посматраном временском периоду произведе 6 комада Производа 1 (једнострука стаклена врата са дрвеним оквиром) и 3 комада Производа 2 (двоструки прозор са дрвеним оквиром), оствариће највећи укупни профит од 36 новчаних јединица, не прекорачујући расположиве капацитете ни код једног погона.

"Крајњи" положај праве функције циља добијен њеним паралелним померањем у смеру супротном од вектора $\vec{c}$ (тј. у смеру вектора $-\vec{c}$ који представља правац најбржег опадања функције F) одређује доњу потпорну праву области D. То је права $5x_1 + 2x_2 = 0$ која са D има само једну заједничку тачку $O = (0,0)$, тј. теме $O = (0,0)$ представља јединствено оптимално решење задатка минимизације F на D, док је минимална вредност ове функције једнака 0. ♦

На претходно описани начин могу се графички наћи оптимална решења било каквог дводимензионалног проблема ЛП.

Испитајмо сада како промена неких параметара проблема (2.6)-(2.10) може утицати на његова оптимална решења. (Озбиљнија анализа овог утицаја за проблеме ЛП произвољних димензија биће изложена у Поглављу 2.8.)

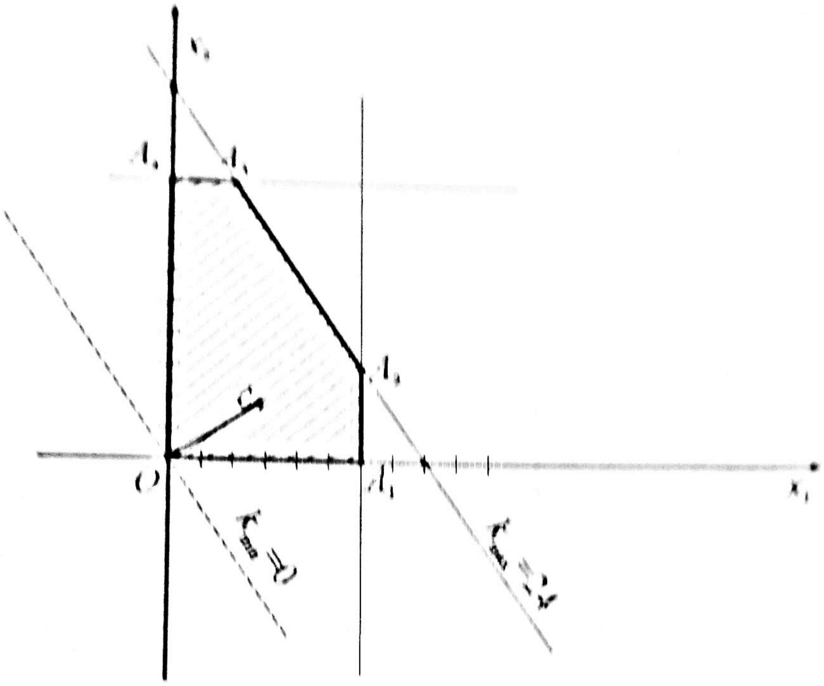
Пример 2.4. Вишеструка решења (ограничени случај). Трансформишимо проблем (2.6)-(2.10) тако да коефицијент уз x_1 у функцији циља F добије нову вредност 3, а да област D остане иста, тј. разматрајмо проблем

максимизирати $3x_1 + 2x_2$

п.о.

$$x_1 \le 6$$
$$2x_2 \le 18$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 24$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Сада је било која права функције циља паралелна правој $3x_1 + 2x_2 = 24$ која садржи (ограничену) ивицу A_2A_3 области D са теменима $A_2 = (6,3)$ и $A_3 = (2,9)$ као крајњим тачкама. Зато је $3x_1 + 2x_2 = 24$ горња потпорна права области D (видети Слику 2.5), а све тачке ивице A_2A_3 представљају оптимална решења трансформисаног проблема за које се постиже максимална вредност функције циља једнака 24.



Сл. 2.5 Вишеструка решења (ограничени случај)

Напоменимо да, пошто се било које оптимално решење налази на дужи A_2A_3, онда се (према Дефиницији 2.1 из 2.2.1) оно може аналитички приказати као конвексна комбинација темена A_2 и A_3, тј. у облику

$$\alpha A_2 + (1-\alpha)A_3 = \alpha(6,3) + (1-\alpha)(2,9) = (2+4\alpha, 9-6\alpha),$$

где је α скалар који задовољава $0 \le \alpha \le 1$. (За $\alpha = 1$ ово решење се своди на теме A_2, а за $\alpha = 0$ на теме A_3). ♦

Пример 2.5. Вишеструка решења (неограничени случај). Размотримо сада следећи проблем добијен из (2.6)-(2.10) давањем нове вредности 0 коефицијенту уз x_1 у функцији циља и променом смера неједнакости у ограничењима (2.7) и (2.9):

$$\text{максимизирати} \quad 2x_2$$

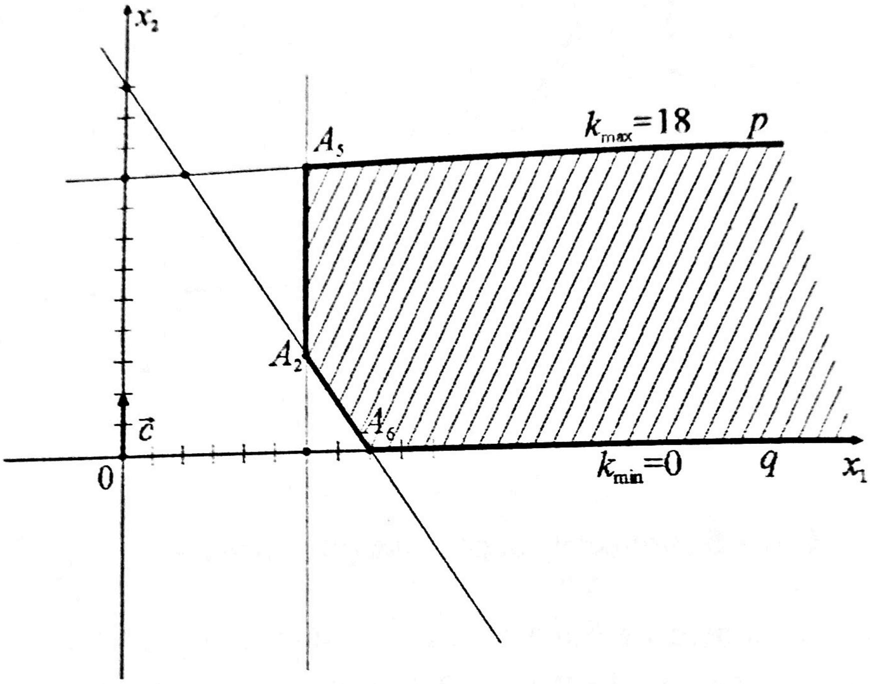
п.о.

$$x_1 \ge 6$$
$$2x_2 \le 18$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 24$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Допустива област овог проблема постаје неограничена (видети Слику 2.6), док су све праве функције циља паралелне са правом $x_2 = 9$. Ова права очигледно представља горњу потпорну праву која садржи (неограничену) ивицу p допустиве области са теменом $A_5 = (6,9)$ као крајњом тачком. Зато све тачке полуправе p представљају оптимална решења проблема која се (према Дефиницији 2.2 у 2.2.1) могу аналитички приказати у облику

$$A_5 + \alpha(1,0) = (6,9) + \alpha(1,0) = (6+\alpha, 9),$$

где је $\alpha \geq 0$, а $(1,0)$ правац полуправе p. Максимална вредност функције циља је 18.



Сл. 2.6. Вишеструка решења (неограничени случај)

(Права $x_2 = 0$ представља доњу потпорну праву, па се минимум функције циља $2x_2$ постиже на читавој полуправој q са теменом $A_6 = (8,0)$ као крајњом тачком). ♦

Пример 2.6. Неограничена функција циља. Посматрајмо проблем максимизације функције (2.6) на допустивој области из Примера 2.5, тј. проблем

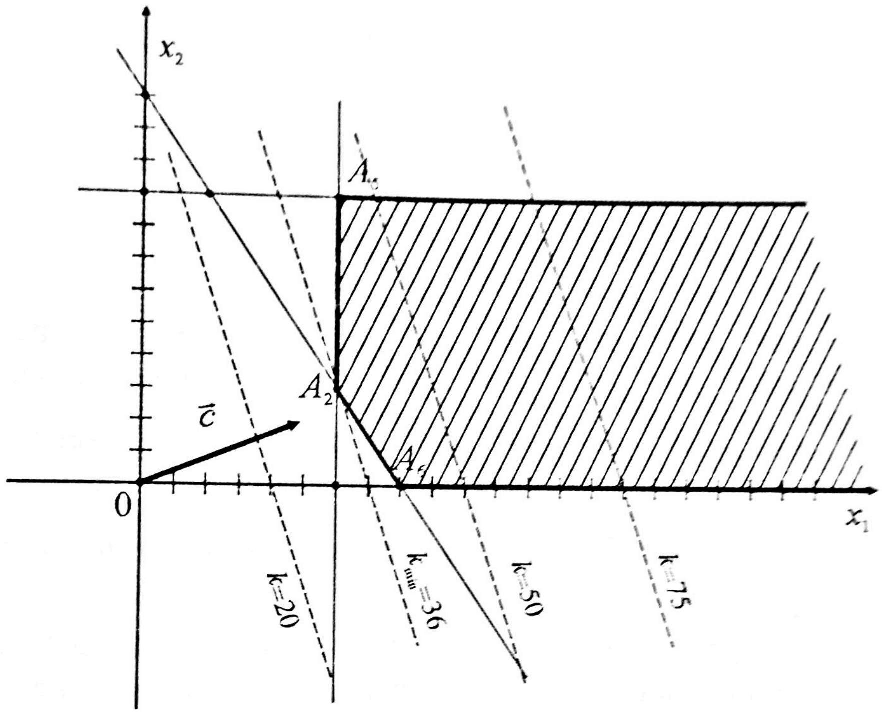
$$\text{максимизирати} \quad F = 5x_1 + 2x_2$$

п.о.

$$x_1 \geq 6$$
$$2x_2 \leq 18$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Овде горња потпорна права очигледно не постоји, јер све праве облика $5x_1 + 2x_2 = k$ за $k \geq 36$ увек имају заједничке тачке са допустивом области (Слика 2.7). Другим речима, функција циља није на овој области ограничена одозго јер на њој може достићи било коју вредност $k \geq 36$. Зато проблем нема оптималних решења.

(Права $5x_1 + 2x_2 = 36$ представља доњу потпорну праву, па је теме A_2 јединствено оптимално решење у коме функција циља постиже минималну вредност 36 на допустивој области.) ◆



Сл. 2.7. Неограничена функција циља

На основу разматрања у Примеру 2.6 јасно је да ни проблем минимизације на неограниченој допустивој области не мора имати оптимална решења – и то у случају када не постоји доња потпорна права, тј. функција циља није ограничена одоздо.

Пример 2.7. Празан допустиви скуп. У случају када се у проблему (2.6)-(2.10) промени смер неједнакости у ограничењима (2.7) и (2.8), проблем се своди на

максимизирати $F = 5x_1 + 2x_2$

п.о.

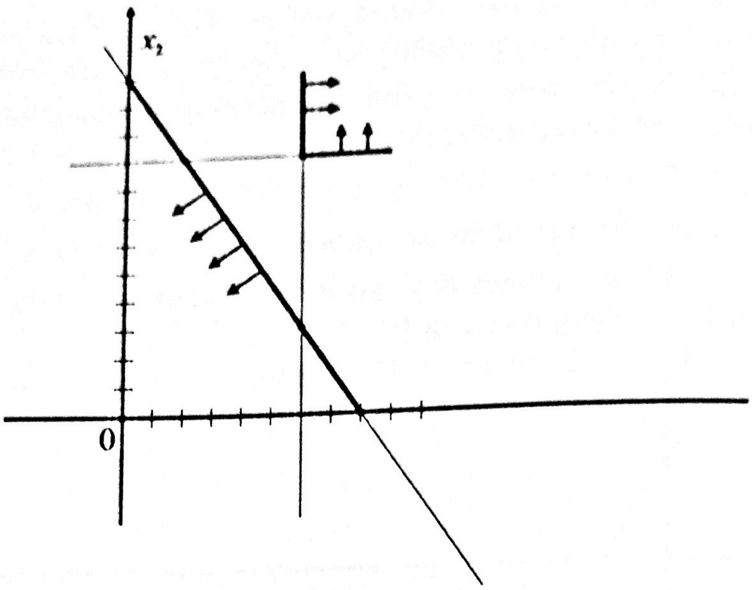
$$x_1 \geq 6$$

$$2x_2 \geq 18$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Пошто су ограничења овог проблема несагласна, допустива област је празан скуп (Слика 2.8). ◆



Сл. 2.8. Празан допустиви скуп

При графичком решавању претходно разматраних примера могу се лако визуелно уочити нека заједничка својства проблема ЛП у дводимензионалној равни.

Својство 2.1. Ако је допустива област D проблема ЛП непразна, тада је D конвексни полигон са бар једним теменом, при чему је број темена коначан. ♦

Својство 2.2. Ако проблем ЛП има оптимална решења сва она припадају граници ∂D области D. Прецизније,

– ако је оптимално решење проблема јединствено оно представља теме области D;
– ако проблем има више оптималних решења, тада сва она чине (ограничену или неограничену) ивицу области D која садржи бар једно теме ове области. ♦

Својство 2.3. Ако је област D непразна и ограничена, тада проблем ЛП увек има оптимално решење. ♦

Својство 2.4. Ако је област D непразна и неограничена, а функција циља неограничена одозго (одоздо), тада проблем ЛП у коме се максимизира (минимизира) ова функција нема оптималних решења. ♦

Јасно је да се, аналогно дводимензионалним проблемима, било који тродимензионални проблем ЛП може геометријски интерпретирати као проблем налажења горње (доње) потпорне равни допустивог конвексног полиедра у уобичајеном простору, и на сличан начин графички решавати. Својства 2.1-2.4 очигледно важе и у овом случају, при чему сва оптимална решења проблема (ако их има више) могу да чине, не само ивицу, него и равну страну допустиве области.

Полазећи од уопштених дефиниција темена, ивице и стране конвексног полиедра произвољне димензије, у Поглављу 2.4 се показује да Својства 2.1-2.4 важе и у случају проблема ЛП било које димензије n за $n > 3$, када се овај проблем не може графички презентирати у уобичајеном простору.